

Universidad de Costa Rica
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Topográfica

Informe de trabajo final de graduación, bajo la modalidad de Práctica
Dirigida de Graduación, para optar por el grado de Licenciado en
Ingeniería Topográfica.

**Análisis de las correcciones de los complementos de
onda corta en el mejoramiento de los modelos
digitales de elevaciones, utilizando los datos de alta
frecuencia LiDAR, para Costa Rica.**

Estudiante: Oscar José Láscarez Jiménez

Director: Dr. Mauricio Varela Sánchez

Julio de 2022

Aprobación del Tribunal Examinador

Este Trabajo Final de Graduación fue aprobado en la ciudad de San José el día 21 de junio del año 2022, por el Tribunal Examinador del Trabajo Final de Graduación de la carrera de Ingeniería Topográfica de la Universidad de Costa Rica, como requisito para optar por el grado académico de Licenciado en Ingeniería Topográfica.



M. Sc. Robert Laurent Sanabria
Presidente del tribunal



M. Sc. Elena Chaves Chaves
Miembro del tribunal



Dr. Mauricio Varela Sánchez
Director del trabajo final de graduación



M. Sc. Juan Gabriel Mc Gregor Sanabria
Lector del trabajo final de graduación



M. Sc. Gustavo Lara Morales
Lector del trabajo final de graduación



Oscar José Lascarez Jiménez

Sustentante

DEDICATORIA

Dedico este a trabajo a mi esposa, mi madre, mi hijo, mis hermanos y demás familiares que confiaron en mí.

AGRADECIMIENTOS

Al profesor Mauricio Varela Sánchez, por la motivación a ampliar mis conocimientos en el campo de la geodesia, además de la guía brindada durante este proceso de investigación.

A los profesores Juan Gabriel Mc Gregor Sanabria, Gustavo Lara Morales y Elena Chaves Chaves, por el asesoramiento brindando en este proceso de investigación, a Jaime Garbanzo León, por motivarme a retomar los estudios para optar por el grado de licenciado en Ingeniería Topográfica.

Al Instituto Costarricense de Electricidad por permitirme aportar en el desarrollo de proyectos para el beneficio de los costarricenses.

Finalmente, a la Universidad de Costa Rica y especialmente a la Escuela de Ingeniería Topográfica, por crear y desarrollar investigación, con el fin de mejorar la sociedad costarricense.

“Cualquier tecnología lo suficientemente avanzada es indistinguible de la magia”

Arthur C. Clarke

Láscarez, O. (2022). Análisis de las correcciones de los complementos de onda corta en el mejoramiento de los modelos digitales de elevaciones, utilizando los datos de alta frecuencia LiDAR, para Costa Rica. Trabajo Final de Graduación. Escuela de Ingeniería Topográfica. Universidad de Costa Rica, Facultad de Ingeniería, San Pedro de Montes de Oca.

RESUMEN

Los Modelos Digitales de Elevación (MDE) de origen satelital brindan la oportunidad de realizar análisis para distintas ramas de la ingeniería, con información actualizada periódicamente. Esta información se encuentra de forma gratuita para la sociedad.

En esta investigación se planteó realizar un mejoramiento en los MDE de origen satelital, aplicando unificación de los modelos geoidales y correcciones basadas en los complementos de onda corta presentes en la información LiDAR aéreo.

Los modelos geoidales utilizados fueron el EGM96s, EGM08 y el Geoide Costarricense Regional calculado por el método de Stokes Helmert, este último desarrollado por la Escuela de Ingeniería Topográfica de la Universidad de Costa Rica.

Se calcularon las diferencias de las alturas ortométricas entre los modelos digitales de elevación de origen satelital NASA DEM 2018, ALOS WORLD 3D y la información LiDAR aéreo disponible. Lo cual permitió analizar las distribuciones estadísticas de las diferencias de alturas ortométricas y basado en dichos cálculos, se propusieron las correcciones para cada modelo satelital.

Para la evaluación de las correcciones propuestas, se realizó una comparación entre los MDE de origen satelital mejorados, con las mediciones GNSS. Tras realizar esa comparación, se brindan los resultados de cada combinación de los modelos geoidales utilizados.

Palabras claves:

Geodesia, modelos geoidales, mediciones GNSS, LiDAR aéreo, Topografía

LISTADO DE FIGURAS

Figura	Página
Figura 2.1. Modelo digital de terreno. Fuente: ESRI (2021).	5
Figura 2.2. Modelo digital de elevaciones. Fuente: ESRI (2021).	6
Figura 2.3. Modelo ráster con tres distintos tamaños de pixel. Fuente: ESRI (2021).	7
Figura 2.4. Modelo ráster de elevaciones en dos y tres dimensiones. Fuente: ESRI (2021).	8
Figura 2.5. Valores aplicados en el punto central del pixel de un Modelo ráster de elevaciones. Fuente: ESRI (2021).	8
Figura 2.6. Componentes del equipo LiDAR aéreo.	11
Figura 2.7. Recorrido de la onda corta del transmisor al receptor. Fuente: Shan (2018).	13
Figura 2.8. Diagrama de operación Teledyne OptoTech. Fuente: Shan (2018).	15
Figura 2.9. Escáner láser Dragon Eye, Leica. Fuente: www.leica-geosystems.com (2021).	16
Figura 2.10. Componentes de un Sistema de Información Geográfica. Fuente: Johnny Vega. (2012).	16
Figura 2.11. Influencia de los valores cercanos y lejanos en el método de interpolación IDW. Fuente: ESRI (2021).	19
Figura 2.12. Elipsoide con semeje mayor (a) y semeje menor (b). Fuente: https://matemelga.wordpress.com (2021).	20
Figura 2.13. Elipsoide y el geoide. Fuente: Wolf (2009).	21
Figura 2.14. Relación entre la altura ortométrica y la altura elipsoidal. Fuente: ESRI (2021). .	22
Figura 2.15. Relación entre la ondulación geoidal y la anomalía de altura. Fuente: Kuhn (2002).	23
Figura 2.16. Método diferencial en GNSS. Fuente: Mena (2008).	25
Figura 2.17. Esquema de medición GNSS en modalidad tiempo real VRS. Fuente: Trimble (2021).	26
Figura 3.1. Zona con información LiDAR aéreo.	28
Figura 3.2. Distribución de las estaciones EMC del ICE en Costa Rica. Fuente: Instituto Costarricense de Electricidad, Área de Topografía (2021).	29

Figura 3.3. Estación de referencia del ICE, ubicado en Tronadora, Guanacaste. Fuente: Instituto Costarricense de Electricidad, Área de Topografía (2021).	30
Figura 3.4. Red de ajuste de las estaciones de medición continua del ICE. Fuente: Instituto Costarricense de Electricidad, Área de Topografía (2021).	31
Figura 3.5. Ubicación de los puntos GNSS medidos en campo.....	32
Figura 3.6. Modelo geoidal EGM96s. Fuente: ICGEM (2021).	35
Figura 3.7. Modelo geoidal EGM08. Fuente: ICGEM (2021).	36
Figura 3.8. Modelo geoidal EGM08 en tres dimensiones. Fuente: Pavlis et al., 2012.	37
Figura 3.9. Modelo geoidal GCR-RSH-2020 dos dimensiones.	38
Figura 4.1. Nubes de puntos clasificada por bandas de colores, color verde representa vegetación y color café representa terreno.	40
Figura 4.2. Proceso de creación de un dataset en ArcGIS. Fuente: ESRI (2021).	41
Figura 4.3. Archivos con información LiDAR aéreo cuya extensión es .LAS.	41
Figura 4.4. Conversión de formato .LAS a ráster. Fuente: ArcGIS (2021).....	42
Figura 4.5. Modelo digital de elevaciones origen LiDAR aéreo en formato ráster con un tamaño de pixel de 30m por 30m.....	43
Figura 4.6. Selección del área a descargar del Modelo Digital de Elevaciones origen satelital NASA. Fuente: NASA (2021).	44
Figura 4.7. Modelo digital de elevaciones origen satelital ALOS World 3D. Fuente: JAXA (2021).....	44
Figura 4.8. Parámetros de proyección cartográfica CRTM05.....	45
Figura 4.9. Transformación de coordenadas geográficas a CRTM05.....	46
Figura 4.10. Selección de modelo geoidal EGM96s. Fuente: ICGEM (2021).....	47
Figura 4.11. Selección de anomalía de altura para el modelo geoidal EGM96s. Fuente: ICGEM (2021).	47
Figura 4.12. Definición de la zona de interés a descargar para el modelo geoidal EGM96s. Fuente: ICGEM (2021).	48
Figura 4.13. Separación de grilla de 0.015° y un total de 80668 puntos correspondientes al modelo geoidal EGM96s. Fuente: ICGEM (2021).	48
Figura 4.14. Grilla de anomalías de altura del modelo geoidal EGM96s en Costa Rica.	49

Figura 4.15. Modelo geoidal EGM96s en formato ráster para Costa Rica.	50
Figura 4.16. Modelo geoidal EGM08 en formato ráster para Costa Rica.	50
Figura 4.17. Interpolación bilineal del modelo geoidal EGM08 en formato ráster y con un tamaño de pixel de 30.71m.	51
Figura 4.18. Utilización de calculadora ráster de ArcToolbox para pasar del modelo geoidal EGM96s al modelo geoidal EGM08.	52
Figura 4.19. Distribución normal. Fuente: Garbanzo - León (2020).	53
Figura 4.20. Comportamiento de la distribución estadística entre Alos World 3D y LiDAR para el modelo geoidal EGM08, cálculo del promedio.	54
Figura 4.21. Comportamiento de la distribución estadística entre Alos World 3D y LiDAR para el modelo geoidal EGM08. Cálculo de la mediana.	55
Figura 4.22. Cálculo de la moda donde se puede observar el comportamiento de la distribución estadística entre Alos World 3D y LiDAR para el modelo geoidal EGM08.	55
Figura 4.23. Comportamiento de la distribución estadística entre NASA DEM 2018 y LiDAR, utilizando el modelo geoidal EGM08.	56
Figura 4.24. Comportamiento de la distribución estadística entre ALOS World 3D y LiDAR, utilizando el modelo geoidal GCR-RSH-2020.	57
Figura 4.25. Cálculo del primer cuantil y el promedio entre ALOS World 3D y LiDAR, utilizando el modelo geoidal GCR-RSH-2020.	58
Figura 4.26. Comportamiento estadístico de las diferencias entre NASA DEM 2018 y LiDAR, utilizando el modelo geoidal GCR-RSH-2020.	59
Figura 4.27. Cálculo de la moda y le promedio para NASA DEM 2018 y LiDAR, utilizando el modelo geoidal GCR-RSH-2020.	59

LISTADO DE TABLAS

Tabla	Página
Tabla 3.1. Mediciones con GNSS en modalidad tiempo real VRS.....	32
Tabla 4.1. Factores estadísticos propuestos para mejorar el MDE ALOS World 3D, utilizando el modelo geoidal EGM08.	56
Tabla 4.2. Factores estadísticos propuestos para mejorar el MDE NASA DEM 2018, utilizando el modelo geoidal EGM08.	57
Tabla 4.3. Factores estadísticos propuestos para mejorar el MDE ALOS World 3D, utilizando el modelo geoidal GCR-RSH-2020.	58
Tabla 4.4. Factores estadísticos propuestos para mejorar el MDE NASA DEM 2018, utilizando el modelo geoidal GCR-RSH-2020.....	60
Tabla 4.5. Diferencias de elevación entre el MDE ALOS World 3D y los puntos de control GNSS, utilizando el modelo geoidal EGM08.	60
Tabla 4.6. Propuesta de mejoramiento al MDE ALOS World 3D con modelo geoidal EGM08 utilizando el promedio, la mediana y la moda.....	62
Tabla 4.7. Diferencias de elevación entre el MDE NASA DEM 2018 y los puntos de control GNSS, utilizando el modelo geoidal EGM08.	63
Tabla 4.8. Propuesta de mejoramiento al MDE NASA DEM 2018 con modelo geoidal EGM08 utilizando el promedio, la mediana y la moda.....	65
Tabla 4.9. Diferencias de elevación entre el MDE ALOS World 3D y los puntos de control con equipo GNSS, utilizando el modelo geoidal GCR-RSH-2020.....	65
Tabla 4.10. Propuesta de mejoramiento al MDE ALOS World 3D con modelo geoidal GCR-RSH-2020 utilizando el promedio, la mediana y la moda.....	67
Tabla 4.11. Diferencias de elevación entre el MDE NASA DEM 2018 y los puntos de control GNSS, utilizando el modelo geoidal GCR-RSH-2020.	68
Tabla 4.12. Propuesta de mejoramiento al MDE NASA DEM 2018 con modelo geoidal GCR-RSH-2020 utilizando el promedio, la mediana y la moda.	69

LISTADO DE ABREVIATURAS Y SÍMBOLOS

CR	Costa Rica
EGM96s	Earth Gravitational Model 1996s
EGM2008	Earth Gravitational Model 2008
GFZ	Deutsches GeoForschungs Zentrum
GNSS	Global Navigation Satellite Systems
GPS	Global Positioning System
ICGEM	International Centre for Global Earth Models
IGN	Instituto Geográfico Nacional
SIG	Sistemas de Información Geográficos
JAXA	Japan Aerospace Exploration Agency
MDT	Modelo Digital de Terreno
MDE	Modelo Digital de Elevaciones
NASA	National Aeronautics and Space Administration
SRTM	Shuttle Radar Topography Mission
ICE	Instituto Costarricense de Electricidad
LiDAR	Light Detection and Ranging
EIT	Escuela Ingeniería Topográfica
UCR	Universidad de Costa Rica
EMC	Estaciones de Medición Continua
NASA DEM 2018	Modelo digital de elevaciones de la National Aeronautics and Space Administration
ALOS World 3D	Modelo digital de elevaciones de la Japan Aerospace Exploration Agency
AW3D	ALOS World 3D
NGA	National Geospatial Agency
ICESat	Ice Cloud and Elevation Satellite

GLAS	Geosciencie Laser Altimeter System
PPP	Precise Point Positioning
IMU	Inertial Measurement Unit
Laser	Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation
ASCII	American Standar Code for Information Interchange
ASPRS	American Society for Photogrammetry and Remote Sensing
QGIS	Quantun Geographic Information System
ESRI	Environmental Systems Research Institute
IDW	Inverse Distance Weighting
WGS84	World Geodetic System 84
h	Altura elipsoidal
H	Altura ortométrica
N	ondulación geoidal
ζ	Anomalía de altura
VRS	Virtual Reference Station
RTK	Real Time Kinemastic
CR-SIRGAS	Datum oficial de Costa Rica
ERS-1	European Remot-Sensing Satellite – 1
NIMA	National Imagenery and Mapping
GEOSat	Geodetic Satellite
SLR	Satellite Laser Ranging
GCR-RSH-2020	Geoide Costarricense Regional calculado por el método de Stokes Helmert
GOCE	Global Gravity Field Models and Grids

ÍNDICE

1.	INTRODUCCIÓN.....	1
1.1.	Consideraciones Generales.....	1
1.2.	Objetivos.....	2
a.	Objetivo general:	2
b.	Objetivos específicos:.....	2
1.3.	Estructura del Trabajo	2
2.	FUNDAMENTOS TEÓRICOS	4
2.1.	Modelos digitales de terreno.....	4
2.2.	Modelos digitales de elevaciones	5
2.3.	Formato ráster.....	6
2.4.	Adquisición de datos para modelos digitales de elevación	9
2.5.	LiDAR aéreo.....	11
2.5.1.	Componentes del LiDAR aéreo.....	11
2.5.2.	Principios físicos	13
2.5.3.	Exactitud.....	14
2.5.4.	Escáner para LiDAR aéreo	15
2.6.	Sistemas de información geográfico	16
2.7.	Interpoladores bilineales.....	17
2.8.	Elipsoide	19
2.9.	Geoide.....	20
2.10.	Relación entre elipsoide y geoide.....	21
2.11.	Cuasigeoide	22
2.12.	Mediciones con GNSS	24
3.	ÁREA DE ESTUDIO E INFORMACIÓN UTILIZADA.....	27
3.1.	Área de estudio	27
3.2.	Mediciones GNSS	28
3.3.	Modelos de geopotencial global.....	34
3.3.1	Modelo geoidal EGM96s.	34

3.3.2	Modelo geoidal EGM2008.....	35
3.3.3	Modelo Geoidal Costarricense-Regional calculado por el Método de Stokes-Helmert.....	37
4.	METODOLOGÍA RESULTADOS Y ANÁLISIS.....	39
4.1.	Normalización de datos LiDAR.....	39
4.2.	Descarga de modelos digitales de elevación satelitales.....	43
4.3.	Transformación de coordenadas.....	45
4.4.	Descarga de modelos geoidales.....	46
4.5.	Importación de modelos geoidales en ArcGIS.....	49
4.6.	Interpolación de modelos geoidales.....	51
4.7.	Aplicación del modelo geoidal EGM08 y modelo geoidal GCR-RSH-2020.	51
4.8.	Cálculo de diferencias entre MDE de origen satelital y MDE de origen LiDAR aéreo.....	52
4.9.	Análisis de las distribuciones estadísticas.....	53
4.10.	Análisis de los resultados de los puntos de control GNSS en los MDE mejorados.....	60
5.	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	71
5.1.	Conclusiones.....	71
5.2.	Recomendaciones.....	73
	BIBLIOGRAFÍA	74
	ANEXOS	77
	Anexos en CD adjunto.....	77

1. INTRODUCCIÓN

1.1. Consideraciones Generales

Los Modelos Digitales de Elevaciones (MDE) de origen satelital, se han convertido en una fuente de información muy importante para muchas aplicaciones de la Ingeniería, estos modelos tienen la ventaja que son actualizados periódicamente, esto gracias a que el satélite recorre frecuentemente el globo terráqueo y se dispone de actualizaciones anuales.

En Costa Rica también se cuenta con MDE, generados por el Instituto Geográfico Nacional (IGN), los cuales son de origen fotogramétrico y están asociados a una fecha específica, la primera edición se realizó en el año 2005 y la segunda edición entre el año 2014 y 2017, el elevado costo económico de la actualización provoca que las renovaciones no se realicen de manera frecuente.

La superficie del terreno cambia constantemente debido a factores naturales como los terremotos, deslizamientos, inundaciones, erosión, entre otros. Por dicha razón es importante que los MDE se vayan actualizando en el tiempo (Felicísimo, 2009).

En el Instituto Costarricense de Electricidad (ICE) se utilizan los MDE como base para realizar la planificación de proyectos de generación eléctrica y de telecomunicaciones, en la etapa básica de diseño, donde se requiere conocer la topografía del terreno con un grado de exactitud mediano, en el orden de los metros. Para posteriormente pasar a la etapa de diseño final donde sí se requiere de exactitud centimétrica. La adquisición de esa información se realiza por medio de métodos topográficos convencionales e información LiDAR aéreo (*Light Detection and Ranging*, por sus siglas en inglés).

Si la información disponible para la etapa de diseño básico se encuentra actualizada con la realidad del terreno, permite obtener un diseño preliminar más acorde a la realidad y reduce los cambios requeridos en la etapa de diseño final, esta reducción de cambios a realizar permite una disminución en tiempo y costo.

EL ICE cuenta con información LiDAR para las zonas donde se ubican los proyectos hidroeléctricos, la cual tiene una alta exactitud y está actualizada, en algunos casos se requiere realizar una ampliación o remodelación de esos proyectos hidroeléctricos y las zonas de interés no están cubiertas por esta información, por lo que sería de gran utilidad

poder utilizar los MDE satelitales, los cuales en su mayoría son gratuitos, hasta cierta precisión y exactitud.

Dicha razón motiva a realizar esta práctica dirigida y poder mejorar los MDE de origen satelital NASADEM 2018 y ALOS World 3D 2019 con datos de alta frecuencia LiDAR aéreo. La validación de estos MDE mejorados se realizará mediante la comparación de mediciones con técnicas posicionamiento satelital.

1.2. Objetivos

Como objetivos del presente trabajo, para lograr mejorar los MDE para Costa Rica, se plantearon los siguientes:

a. Objetivo general:

Analizar la combinación de los modelos digitales de elevaciones NASADEM 2018 y ALOS World 3D 2019 con datos de alta frecuencia LiDAR, mediante los complementos de onda corta, con el fin de mejorar estos modelos.

b. Objetivos específicos:

Comparar las técnicas de adquisición de datos y los orígenes de cada modelo digital del terreno, para generar un conocimiento más detallado de las implicaciones de la combinación.

Diseñar el procedimiento de combinación de los datos LiDAR, mediante la utilización de interpoladores de dos dimensiones, para la normalización los datos.

Obtener un modelo digital de terreno mejorado para NASADEM 2018 y ALOS World 3D 2019, a partir de las correcciones de los complementos de onda corta con datos de alta frecuencia LiDAR.

Validar mediante la distribución de los residuos provenientes de la comparación de mediciones en el terreno con técnicas convencionales topográficas y los modelos corregidos, para su posible ratificación.

1.3. Estructura del Trabajo

En el primer capítulo, Introducción, se presentan consideraciones generales como introducción al tema de investigación, el objetivo general como los objetivos específicos planteados para este trabajo final de graduación y la estructura con la que cuenta el trabajo en su desarrollo.

Durante el segundo capítulo, Fundamentos Teóricos, se desarrollan los conceptos teóricos básicos que sustentan esta investigación, como lo son los siguientes temas: modelo digital de terreno, modelo digital de elevación, LiDAR aéreo, interpoladores bilineales, Sistemas de Información Geográfica, el elipsoide, el geoide, modelos geoidales y mediciones GNSS.

El tercer capítulo, Área de estudio e información utilizada, se describen las características de las áreas de estudio, además se explican los conjuntos de datos que se utilizaron para los cálculos de esta investigación, como las fuentes de información de los modelos geoidales y los MDE de origen satelital, como también la información LiDAR aéreo.

En el cuarto capítulo, Metodología, se describe el conjunto de procedimientos utilizados que permitieron alcanzar los objetivos planteados, llevando así a la obtención de los resultados y su respectivo análisis.

Por último, en el capítulo quinto, se presentan las conclusiones derivadas de la investigación, de acuerdo con los objetivos iniciales.

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

2.1. Modelos digitales de terreno

El desarrollo tecnológico y científico han evolucionado la manera en la cual se acostumbraba a modelar la forma de la tierra, anteriormente se graficaban curvas de nivel en mapas topográficos y se visualizaba la información del terreno en dos dimensiones. Con la inclusión de las computadoras, estas permiten la automatización de los procesos que ayudan y facilitan el trabajo de cálculo, visualización, interpretación, uso y análisis de los modelos de terreno en tres dimensiones con la ayuda de softwares especializados, lo cual trae grandes ventajas para un mejor entendimiento de la forma del terreno.

Un modelo es definido como una representación simplificada de la realidad del terreno en la que se logra describir propiedades determinantes como lo son la elevación y pendiente (Joly, 1988). De la definición anterior, se desprende que el modelo reproduce parcialmente el terreno, por lo tanto, existen distintos modelos que pueden contener menor o mayor resolución de la realidad y estos a su vez pueden representar de mejor forma el terreno.

Los Modelos Digitales de Terreno (MDT) se incluyen en la categoría de modelos simbólicos, debido a que el objeto real que es el terreno es representado mediante una simbolización matemática, compuesta por variables matemáticas, estadísticas, geográficas, entre otras. (Felicísimo, 2009), estos MDT son relaciones de correspondencia entre propiedades del terreno y algoritmos matemáticos, que permiten la modelación simétrica entre algunas características del terreno con respecto a la realidad.

Los MDT se han definido también como un conjunto de datos numéricos que describen la distribución espacial de una característica del terreno (Doyle, 1978). Esta definición permite ampliar el concepto de modelo descrito en los párrafos anteriores, ya que los modelos digitales están codificados y georreferenciados, lo cual brinda grandes bondades para el procesamiento y análisis de la información, mediante aplicaciones informáticas.

También menciona (Doyle, 1978), que para elaborar un modelo digital se requiere de un proceso de asignación o codificación de las variables del terreno, para que estas puedan ser representadas posteriormente en el modelo a generar.

Dos variables importantes que deben tener los MDT son la cuantitativa y la de distribución continua, estas dos permiten generar una nueva definición, siendo así un MDT una estructura de datos que representa la distribución espacial de una variable cuantitativa y continua (Felicísimo, 2009).

Con la incorporación de los Sistemas de Información Geográfica (SIG) se pueden generar los MDT a partir de modelos digitales analógicos, es decir se pueden utilizar mapas topográficos analógicos o en dos dimensiones como insumos para generar los MDT, el proceso inicia ingresando líneas (curvas de nivel) o puntos (con elevación del terreno), las cuales pueden ser georreferenciadas, posteriormente se elige un método de interpolación, y como resultado final se obtiene el MDT.

Los Modelos Digitales de Terreno pueden considerar elevaciones del terreno y también incluir la infraestructura como edificios, puentes, entre otros elementos. En la figura 2.1 se muestra un modelo de terreno que incluye las elevaciones de estos elementos.

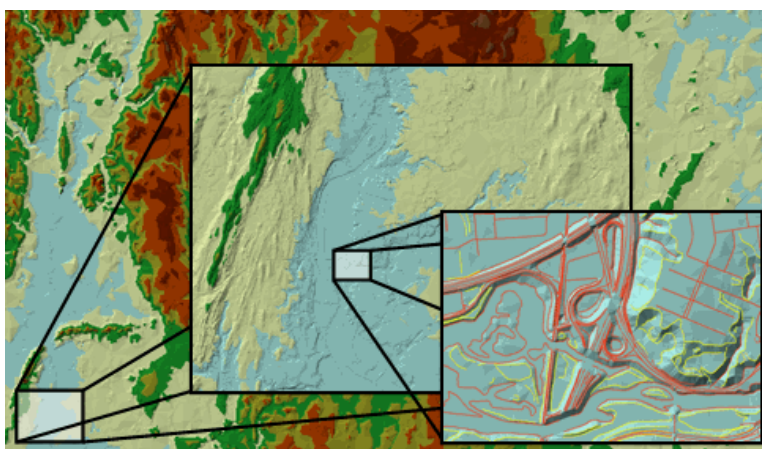


Figura 2.1. Modelo digital de terreno. Fuente: ESRI (2021).

2.2. Modelos digitales de elevaciones

Los Modelos Digitales de Elevación (MDE), se pueden definir como una estructura numérica y georreferenciada que describe un conjunto de elevaciones, estos modelos son representaciones de la elevación del terreno.

Otra definición de un MDE, explica que es una estructuración numérica de datos que representan la distribución espacial de la altitud de la superficie del terreno, localizada en las abscisas y ordenas X e Y de un sistema de coordenadas (Felicísimo, 2009). La cual incorpora los conceptos de elevaciones y determinación de la posición o ubicación de estas.

Los MDE se dividen en dos grandes grupos de datos: vectoriales y ráster. Los modelos vectoriales están confirmados por conjuntos de líneas y puntos que poseen las coordenadas X, Y y Z, mientras que los modelos ráster son un conjunto de valores

distribuidos regularmente en un área, agrupados en filas y columnas. La estructura característica de los ráster son las matrices.

Un Modelo Digital de Elevaciones se puede describir de forma genérica con una función de dos variables continuas, en donde las coordenadas X e Y representan la localización geográfica y la coordenada z representa la elevación. De acuerdo con la siguiente ecuación.

$$z = f(x,y) \quad (2.1)$$

En el grupo de los datos vectoriales se encuentran las redes de triángulos de forma irregular (TIN, por sus siglas en inglés) las cuales definen una superficie. Esta red de triángulos puede ser derivada de un conjunto de líneas o puntos.

Mientras que en el grupo de los datos ráster se pueden asociar a la creación de una retícula o rejilla sobre el terreno, cubriendo de manera total el área deseada y cuyo objetivo es extraer la variable de la elevación. La forma de la rejilla puede ser variada, pero la más utilizada es una red regular compuesta por filas y columnas espaciadas de manera equidistante y con lo cual se genera una malla cuadrada.

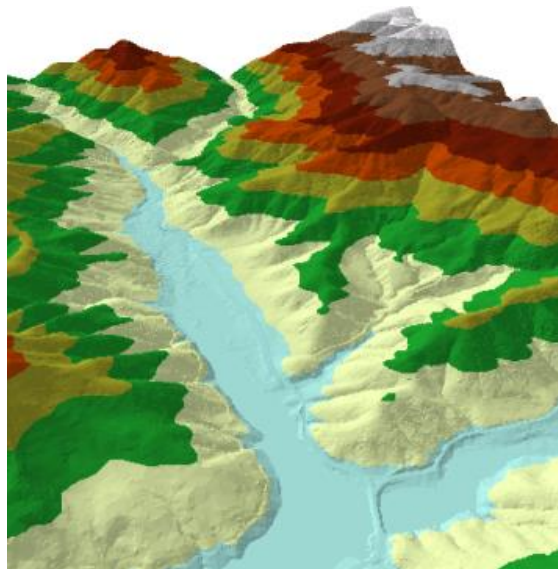


Figura 2.2. Modelo digital de elevaciones. Fuente: ESRI (2021).

2.3. Formato ráster

El formato ráster es un arreglo matricial, compuesto por filas y columnas que forman celdas. El tamaño de las filas y columnas va a definir el tamaño del pixel (o también conocido como celda). Cada celda o pixel tiene un único valor, el cual es considerado

como representativo para toda la superficie abarcada por la longitud de la fila y la columna (De Meers, 2002).

De acuerdo con De Meers (2002), cuando se utilizan formatos ráster para variables cuantitativas, se compone por dos elementos principales:

- La matriz de datos, en el caso de los MDE la variable sería numérica, además cuantitativa y representaría la elevación del terreno.
- Información geométrica, es donde se define el número de filas y columnas que forman la matriz, además del tamaño de píxel o celda generado.

La dimensión del píxel está directamente relacionada al grado de detalle que se muestra en el ráster. Entre más pequeño sea el tamaño de celda o píxel, mayor detalle o suavizado será la información que represente. Si el tamaño de píxel es más grande, estaría representado menor detalle del terreno en el caso de un MDE (ESRI, 2021).

En la figura 2.3 se muestra en la parte superior la figura original en color amarillo, además se representa esa misma figura con tres tamaños de celda distintos:

- El ráster de la izquierda, el cual tiene el tamaño de píxel más pequeño, se aproxima con gran detalle a la figura original.
- En ráster central, que posee un tamaño de celda mediano o intermedio con respecto a los otros ráster, se nota como empieza a alejarse de la figura original.
- En el ráster de la derecha, que está formado por píxeles grandes, provoca que represente con menos detalle la figura original.

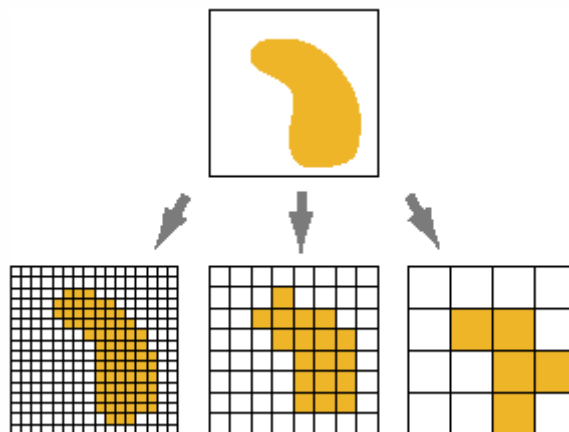


Figura 2.3. Modelo ráster con tres distintos tamaños de píxel. Fuente: ESRI (2021).

La visualización de los MDE en formato ráster comúnmente se realiza en distintos colores, asignando un color para cada valor de elevación, los cuales están asociados a una escala. Esta escala de colores es editable por el usuario, por lo tanto, no hay un único formato de presentación.

En la figura 2.4 se observa en la parte izquierda una vista en dos dimensiones, en la cual cada píxel posee un valor de elevación y un color respectivo. En la parte derecha se observa una gráfica en tres dimensiones, de modo que permite visualizar la magnitud de la elevación para cada celda.

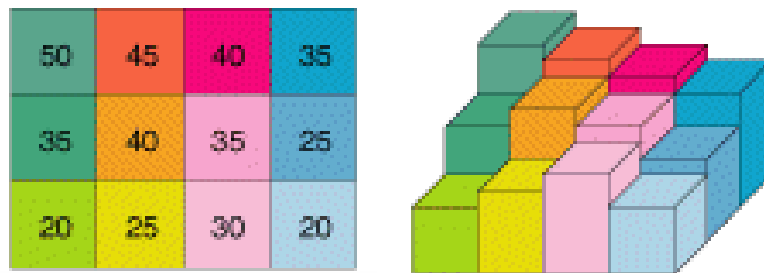


Figura 2.4. Modelo ráster de elevaciones en dos y tres dimensiones. Fuente: ESRI (2021).

En el caso de los MDE representados en formato ráster, el valor del píxel representa un valor medido en el punto central de la celda. Este valor se considera representativo para la totalidad del píxel (De Meers, 2002). En la figura 2.5 se ilustra dicha condición.

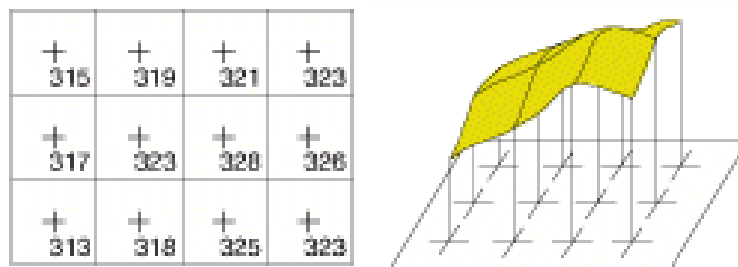


Figura 2.5. Valores aplicados en el punto central del píxel de un Modelo ráster de elevaciones. Fuente: ESRI (2021).

2.4. Adquisición de datos para Modelos Digitales de Elevación

Como se describió anteriormente, los MDE actualmente se manejan en formato ráster, dependiendo del origen de los datos y la precisión requerida así se define la separación de la grilla o el tamaño de la celda.

El origen de los datos se puede clasificar en directo e indirecto (Felicísimo, 2009), el origen directo corresponde a la utilización de equipos de medición directa sobre la forma de la tierra como lo son una estación total, un radar, un receptor de posicionamiento satelital, entre otros. Mientras que el origen indirecto es aquel que utiliza como base un conjunto de datos existentes, cuya fuente podría ser cartografía que contenga curvas de nivel o datos puntuales con elevación.

Los MDE cuyos datos fueron capturados de forma directa, usualmente utilizan equipos láser para realizar la medición, así es el caso de los MDE satelitales. Estos utilizan un sistema de medición compuesto por un radar con altímetro láser (NASA, 2019) el cual es transportado en un satélite.

La misión satelital *Shuttle Radar Topography Mission* (SRTM) es una misión de la *National Aeronautics and Space Administration* (NASA) y la *National Geospatial Intelligence Agency* (NGA) la cual fue realizada en febrero del año 2000, durante un período de 11 días, completando 176 órbitas alrededor de la Tierra, el transbordador utilizado fue el Endeavour, generando un MDE con una resolución de 3 arcosegundos, lo cual generó una separación de aproximadamente 90m entre los datos, formando un modelo ráster (NASA, 2019).

El principio que utilizó esta misión para la adquisición de datos fue la interferometría, que consiste en obtener varias imágenes de la misma zona desde distintas vistas, la diferencia obtenida entre las imágenes en común permite determinar la elevación y con esto finalmente poder generar el MDE (NASA, 2019).

La misión SRTM fue actualizada en el año 2015, en donde se generaron datos de elevación con una resolución de 1 arcosegundo, lo que es una separación de aproximadamente 30m entre los datos, formando un modelo ráster más detallado que el anterior. Finalmente, en el año 2018 se obtuvo el MDE NASADEM 2018. Productos de la combinación de los datos de elevación obtenidos en la misión satelital *Ice Cloud and Elevation Satellite* (ICESat). Esta misión transportaba un sistema láser es llamado *Geoscience Laser Altimeter System* (GLAS) el cual llegó a mejorar la cobertura de los datos tomados en misiones anteriores. (NASA, 2019).

Para el caso del MDE generado en la misión satelital ALOS World 3D llevada a cabo por la *Japan Aerospace Exploration Agency* (JAXA). El satélite llamado ALOS llevaba a bordo un instrumento pancromático de teledetección para mapeo estéreo, la misión tuvo cuatro lanzamientos, el primero en el año 2015 que generó una resolución de 1 arcosegundo, los cuales representan una separación de aproximadamente 30m entre los datos, generando el modelo ráster. Este MDE tenía la particularidad que dejaba zonas descubiertas en los polos terrestres (JAXA, 2019).

La segunda y tercera misión fueron lanzadas en los años 2017 y 2018 respectivamente, las cuales completaron las zonas descubiertas entre los 60 grados norte y 60 grados sur, que habían quedado con menor detalle en la primera misión (JAXA, 2019).

La cuarta misión fue lanzada en abril de 2019 y es considerada como una mejora para la cobertura de información en las zonas ubicadas más al norte, superior a los 60 grados norte y sur, además de las zonas costeras. El modelo generado es llamado ALOS World 3D (AW3D) (JAXA, 2019).

Otra forma de obtener los datos para generar un MDE es mediante la utilización de LiDAR, la cual es una tecnología de medición de distancias basada en el tiempo que se tarda en emitir y recibir la señal del láser, considerando el objetivo de medición y el punto donde se genera la señal (Dong, 2018).

La tecnología LiDAR permite la obtención de la información tanto de día como de noche, los factores que provocan problemas en la medición con esta técnica son los siguientes: niebla densa, fuerte lluvia, nieve, densas nubes entre el sistema de láser y el objeto, entre otras variables.

LiDAR es considerado como un sensor remoto, el brinda la posibilidad de generar los MDE. Esta tecnología llegó para definir de mejor manera la superficie terrestre, permitiendo obtener un mayor detalle. La altura de vuelo para LiDAR es mucho menor que la altura de vuelo de los satélites, lo cual permite obtener más información por metro cuadrado que lo que se obtiene con una misión satelital, genera mejores precisiones y una nube de puntos más densa, razones por las cuales se logra modelar de mejor manera la superficie de la Tierra con un MDE de origen LiDAR que un MDE de origen satelital. La extensión en cuanto al área de cobertura de los MDE generados con tecnología LiDAR es mucho menor que uno generado satelitalmente (Dong, 2018).

2.5. LiDAR aéreo

Los equipos topográficos que contienen escáner láser han sido objeto de gran desarrollo y utilización recientemente en distintas aplicaciones topográficas, en las cuales se requería mayor detalle que el que es alcanzado con equipos convencionales topográficos, como lo son las estaciones totales.

Estos sensores láseres (también así llamados) se han instalado en vehículos terrestres y aeronaves, generando información en 3 dimensiones, además de grandes volúmenes de datos, lo cual, para fines topográficos, permite realizar un modelo más apegado a la realidad del terreno.

En los inicios de los vuelos con sensores LiDAR, entre los años 1960 y 1970 se contaba con la limitante, que solamente se disponía de la información de elevación, no así con la información de la posición de los objetos, por lo que se debían georreferenciar los datos, posterior al momento del vuelo (Shan, 2018).

Tuvieron que pasar varios años para que se lograra obtener la información georreferenciada con estos sistemas, a partir de los años de 1990, con la inclusión de los equipos de posicionamiento satelital y la constelación de *Global Positioning System* (*GPS*) esto fue posible (Dong, 2018).

Actualmente los vuelos con escáner LiDAR cuentan también con sistemas de medición inercial, los cuales permiten aplicar correcciones a las mediciones realizadas, considerando el posicionamiento brindado por el receptor GPS y la dirección del láser. Brindando precisiones del orden centimétrico (Shan, 2018).

2.5.1. Componentes del LiDAR aéreo

El escáner que se utiliza típicamente en las campañas de medición LiDAR aéreo, de acuerdo con Shan, 2018, está formado como se muestra en la figura 2.6 por las siguientes partes.



Figura 2.6. Componentes del equipo LiDAR aéreo.

El sistema de posicionamiento satelital está compuesto por equipos receptores de satélites que pueden utilizar la constelación de satélites del GPS o *Global Navigation Satellite System* (GNSS), específicamente esto permite realizar la determinación de la posición y orientación de las mediciones realizadas por medio del láser (Meyer, 2010).

Posterior a la adquisición de mediciones con el receptor satelital, se debe realizar el ajuste de la información, este proceso puede hacerse de dos formas: utilizando una red de Estaciones de Medición Continua (EMC) o utilizando la metodología de *Precise Point Positioning* (PPP) conocidas como Posicionamiento de Punto Preciso, el cual consiste en una metodología basada en el uso de órbitas precisas y correcciones del reloj de los satélites, utilizando la red mundial de estaciones de referencia GPS (Meyer, 2010).

El sistema de medición inercial o *Inertial Measurement Unit* (IMU) normalmente está integrado junto con el equipo de recepción satelital, ya que permite medir la velocidad de viaje y la orientación. Estas dos variables permiten realizar correcciones por movimientos típicos que sufren las aeronaves como lo son el cabeceo o las vibraciones producidas por las corrientes de viento (Dong, 2018).

La unidad electrónica es normalmente una computadora, la cual proporcionan muchas de las funciones de control de procesamiento de las actividades que se van realizando durante el vuelo. Esta unidad generalmente está equipada con un monitor, el cual permite la revisión constante del tiempo y altura de vuelo, registro de datos, mediciones angulares del escaneo, estado del sistema de posicionamiento satelital y el sistema de medición inercial.

El almacenamiento de la información anterior se realiza en un disco duro, pudiendo ser este interno o externo, los de estado sólido generan mejor rendimiento actualmente.

El escáner láser es el dispositivo que transmite y recibe la señal del pulso láser, esta palabra láser es acrónimo en inglés de *Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*, que se puede traducir como la amplificación de la luz por emisión estimulada de radiación (Shan, 2018).

El láser es un dispositivo óptico que al ser activado por una fuente externa de energía produce y emite un pulso de radiación monocromática, en la que todas las ondas son coherentes y están en la misma fase (Shan, 2018).

En la figura 2.7 se logra ver el recorrido de la onda corta, saliendo del escáner que trabaja como transmisor en el punto A, hasta llegar al objetivo llamado B, para

posteriormente realizar el recorrido de la onda para retornar al punto A y ser recibida por el escáner.

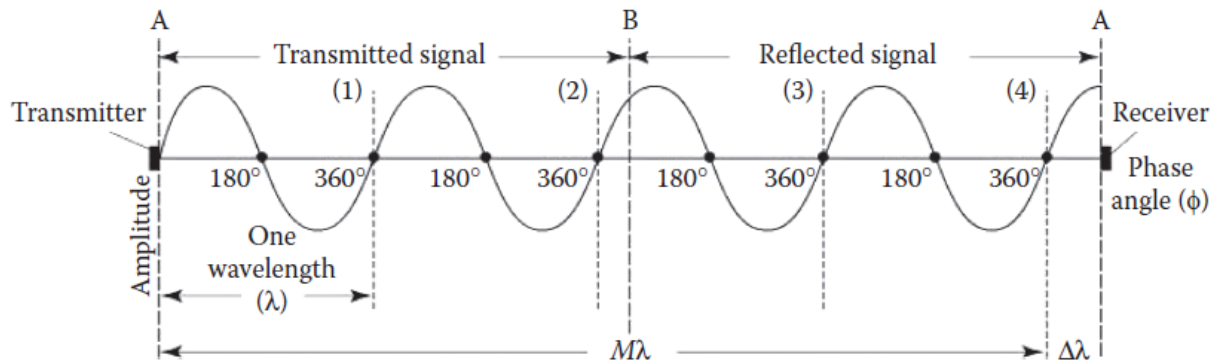


Figura 2.7. Recorrido de la onda corta del transmisor al receptor. Fuente: Shan (2018).

Actualmente la mayoría de las aeronaves utilizadas para realizar vuelos con tecnología LiDAR aérea disponen de cámaras digitales, la cuales permiten obtener fotografías de alta calidad. Algunas también permiten separar la banda de colores en rojo, verde y azul (RGB, por sus siglas en inglés). Lo cual trae grandes ventajas de automatización en el procesamiento de imágenes, específicamente en la reconstrucción de cada pixel, el cual se le puede asociar la coloración real del elemento medido.

2.5.2. Principios físicos

LiDAR aéreo utiliza pulsos de longitud de onda corta en los láseres emitidos, para los cuales se puede medir el tiempo del recorrido completo, desde el momento en que son emitidos por el sensor hasta cuando regresan al mismo. Usualmente los láseres utilizan una longitud de onda corta entre 1000 y 1600 nm (Dong, 2018).

El proceso de medición LiDAR aéreo involucra tanto las características del objetivo como las del sensor, además de las condiciones atmosféricas, altura de vuelo, entre otras. Lo anterior está descrito en la ecuación estándar LiDAR, la cual es expresada como (Wagner et al. 2006):

$$P_r(t) = \frac{D^2}{4\pi\lambda^2} \int_0^H \frac{n_{sys}n_{atm}}{R^4} P_t \left(t - \frac{2R}{v_g} \right) \sigma(R) dR \quad (2.2)$$

En donde:

- P_r es la fuerza de recepción de la señal del láser.
- t es el tiempo.
- D es el diámetro de apertura óptico.

- λ es la longitud de onda corta.
- H es la altura de vuelo.
- $n_{sys}n_{atm}$ son los factores de transmisión del sistema y de la atmósfera.
- R es la distancia entre el sensor y el objetivo.
- P_t es la fuerza de transmisión de señal.
- v_g es la velocidad del láser
- $\sigma(R) dR$ es la sección transversal aparente efectiva.

2.5.3. Exactitud

La exactitud que ofrece la tecnología LiDAR aéreo es uno de los diferenciadores con respecto a las otras tecnologías utilizadas para la recolección de datos topográficos, en comparación con las técnicas satelitales y las técnicas fotogramétrica, LiDAR aéreo brinda mayor exactitud.

Esta característica de exactitud varía dependiendo del sensor que se utilice, así como la altura y velocidad del vuelo, el fin para el que se requiera la información, entre otras variables.

Para determinar la exactitud de los datos generados se realiza por medio de una comparación estadística entre puntos establecidos en el terreno con coordenadas, (puntos de control) y los puntos medidos con el láser. Es usual que se mida la exactitud en términos de la desviación estándar y el error medio cuadrático obtenido (Evans et al. 2009).

La principal fuente de error esperada para las mediciones con LiDAR aéreo provienen del sistema inercial, el cual se encarga de realizar los ajustes entre la dirección con la que es dirigido el láser desde el sensor y la determinación de la posición por medio del sistema de posicionamiento satelital. Esto provoca que no se logre determinar de manera correcta la localización de los objetos medidos (Huising, 1998).

Otra fuente de error es posible obtenerla cuando hay cambios de pendiente en el terreno de manera abrupta, cambiando de elevaciones altas a elevaciones bajas en poca distancia horizontal, como también en zonas de zanjas o huecos donde por lo estrecho de la abertura es difícil obtener el rebote del láser (Dong, 2018).

Los errores del sistema de posicionamiento satelital se pueden originar por problemas de inicialización, esto ya que se requiere de un tiempo previo donde se adquieren satélites,

los cuales van a brindar la posibilidad de determinar las coordenadas en conjunto con el sistema inercial.

2.5.4. Escáner para LiDAR aéreo

Existen gran cantidad de casas comerciales que se dedican a la fabricación de escáner láser que pueden ser instalados en aeronaves, los principales son: Teledyne OptoTech, REIGL, IGI, Trimble, Helimap, Blom, Leica, Fugro, Harris Corporation, Sigma Space Corporation, entre otros.

En la figura 2.8 se muestra el procedimiento que utilizan los sensores láser de la casa *Teledyne OptoTech*, donde la aeronave vuela a una altura de 1200m, el ángulo del escaneo tiene una apertura de 30°, lo cual le permite abarcar en el terreno franjas de 650m de longitud. Con la interacción de los satélites, el sistema IMU (permite corregir giros en los tres ejes de coordenadas) y los puntos de control GPS colocados en el terreno, se puede obtener una precisión vertical de ± 15 cm. También es posible obtener una separación de puntos cada 1.5m en una dirección y de 0.30cm en otra dirección.

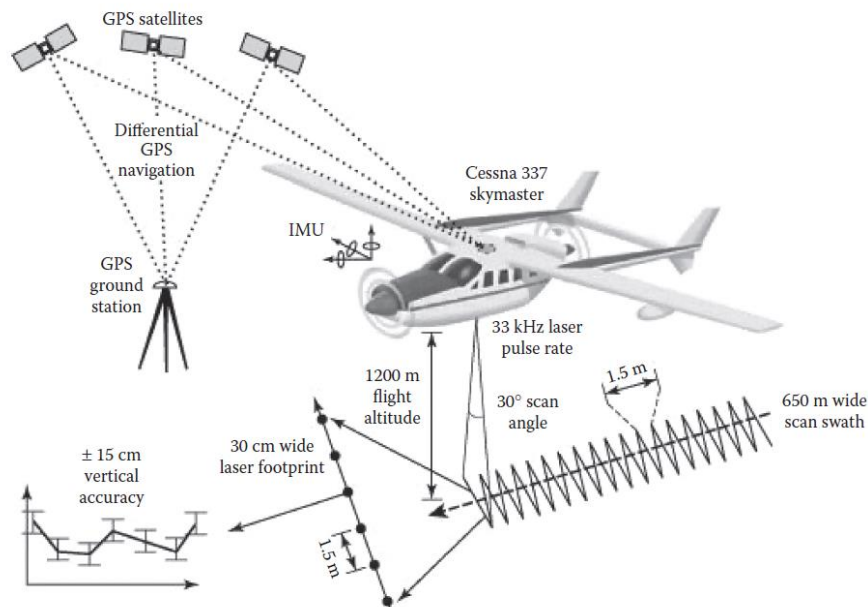


Figura 2.8. Diagrama de operación Teledyne OptoTech. Fuente: Shan (2018).

En la figura 2.9 se muestra el escáner láser de la casa comercial Leica, específicamente el modelo DragonEye, el cual tiene una longitud de onda de 1064 nm, una frecuencia de pulso láser de hasta 1Mhz, puede ser operado a una altura entre los 300m y 1600m, una densidad de puntos en el terreno mayor a los 16 puntos por cada metro cuadrado a una velocidad promedio de 60 m/s y una altura promedio de 1000m (Leica Geosystem, 2020).



Figura 2.9. Escáner láser Dragon Eye, Leica. Fuente: www.leica-geosystems.com (2021).

2.6. Sistemas de Información Geográfica

Los Sistemas de Información Geográfica (SIG) son una herramienta informática que utiliza una interfaz gráfica para describir información posicional, a la cual se le pueden asociar variables y esto permite que funcione como una base de datos geoespaciales. Está compuesta por los siguientes elementos que se muestran en la figura 2.10 (Tomlinson, 2007).

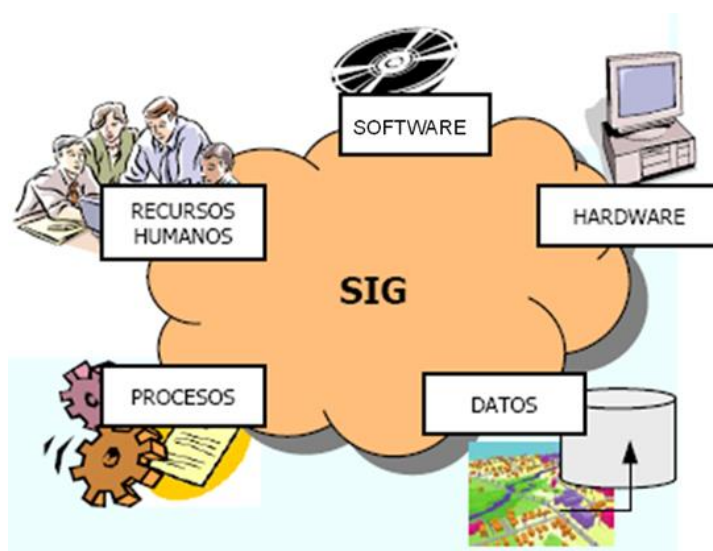


Figura 2.10. Componentes de un Sistema de Información Geográfica. Fuente: Johnny Vega. (2012)

Para manipular información en formato ráster los SIG se han convertido en grandes aliados, las celdas que conforman la grilla del ráster en un MDE contienen información georreferenciada y de elevación, la extensión geográfica del ráster puede ser muy grande, abarcando países completos o grandes regiones. Los SIG permiten un manejo ágil con una excelente visualización gráfica de estos archivos, lo que permite realizar cálculos de acuerdo con la aplicación que se requiera. Como principales características se pueden mencionar (Tomlinson, 2007):

- Permiten trabajar con gran cantidad de datos, como se conoce actualmente Big Data.
- Captura, edición, almacenamiento, consulta y gestión de datos.
- Análisis de los datos de forma espacial.
- Genera resultados en formato gráfico y literal.

Actualmente hay una gran variedad de software que permiten manipular la información geoespacial, los cuales se clasifican en software de acceso libre o de licenciamiento pagado. Dentro de la clasificación de software libre se encuentra el QGIS y en la línea del software con licenciamiento se ubica el ArcGIS Desktop, la familia de aplicaciones SIG de escritorio, es una de las más ampliamente utilizadas, incluyendo en sus últimas ediciones las herramientas ArcReader, ArcMap, ArcGlobe, además de diversas extensiones. ArcGIS for Desktop se distribuye comercialmente bajo tres niveles de licencias que son, en orden creciente de funcionalidades y costo: ArcView, ArcEditor y ArcInfo. Todas de la casa matriz *Environmental Systems Research Institute* (ESRI).

2.7. Interpoladores bilineales

Los métodos de interpolación bilineal ofrecen la posibilidad de proyectar datos correspondientes a superficies continuas a partir de datos discretos, esto brinda la posibilidad de realizar un análisis más integral, ya que permite contar con datos en zonas donde no se contaba con información (Jonhston et al. 2001). De la definición anterior se puede ampliar al concepto de manera que permite manipular la información espacial y generar información nueva a partir de datos existentes.

El método *Inverse Distance Weighting* (IDW) conocido como un interpolador basado en la ponderación de la distancia inversa, el cual consiste en realizar un promedio de datos a partir de la distancia, desde el punto de muestra. Lo que significa que las influencias de

los puntos disminuyen conforme aumenta distancia o también que entre más lejano esté el punto menos influye en la ponderación.

Jonhston (2001) define el método IDW como un algoritmo matemático simple que depende de la distancia. Por dicha razón, la precisión de la interpolación dependerá de la cantidad de puntos o datos con que se cuente y también de la distancia a la que se encuentren estos.

La fórmula general que permite realizar el proceso de interpolación por el método IDW se describe de la siguiente manera:

$$z_j = \sum_{i=1}^n k_{ij} * z_i \quad (2.3)$$

En donde:

z_j es el valor estimado para un punto j

n es el número de puntos usados en la interpolación

z_i es el valor de los puntos i enésimos estimado para un punto j

k_{ij} es el peso asociado al dato i en el cálculo del nodo, los pesos k varían entre 0 y 1 para cada dato

Para establecer una función de proporcionalidad entre el peso y la distancia, la ecuación general queda así:

$$z_j = \frac{\sum_i \frac{z_i}{d_{ij}^B}}{\sum_i \frac{1}{d_{ij}^B}} \quad (2.4)$$

En donde:

$$k_{ij} = \frac{1}{d_{ij}^B}$$

B es un exponente de ponderación que controla la forma en la que el peso disminuye con la distancia

En la figura 2.11 se considera el punto amarillo como el valor que se generó posterior a la interpolación, en el proceso de determinar este nuevo valor (punto amarillo), los puntos de color rojo tuvieron mayor peso o fueron más influyentes que los puntos de color azul.

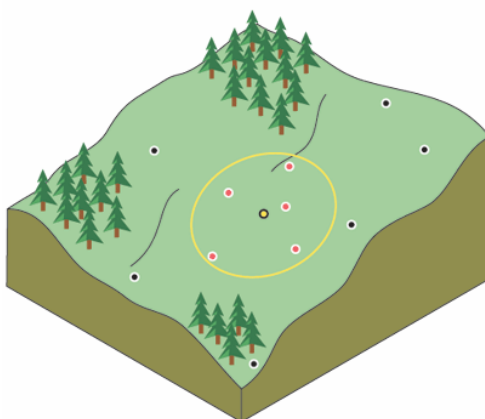


Figura 2.11. Influencia de los valores cercanos y lejanos en el método de interpolación IDW. Fuente: ESRI (2021).

Gotway et al. (1996) citan algunas de las desventajas que presenta este método, las cuales se pueden resumir de la siguiente manera:

- La calidad de la interpolación puede disminuir si se manejan datos con una distribución geoespacial irregular.
- Los valores mínimos y máximos se pueden presentar solamente en los datos existentes, no es común que en los datos generados de la interpolación se generen mínimos o máximos.
- Se pueden presentar valores poco reales alrededor de los datos, lo cual es conocido como “ojo de buey”, lo anterior demuestra el peso que se le puede asignar a la variación de un punto de muestreo sobre los que están alrededor. Esto ocurre con poca frecuencia dentro del proceso de interpolación.

Dentro de las ventajas que existen de utilizar el método IDW, Kravchenko (2003) resalta principalmente dos ventajas:

- Cuando el distanciamiento es muy grande, este interpolador funciona mejor que otros que utilizan variogramas.
- Cuando se trabaja con bases de datos grandes, como es el caso de un modelo ráster para regiones amplias, genera menos valores máximos y mínimos que otros métodos de interpolación.

2.8. Elipsoide

Definir la forma de la Tierra ha sido de gran interés para la sociedad a través del tiempo. Por dicha razón es que se ha estudiado desde varias áreas científicas, la forma del globo terráqueo.

La visión matemática se considera como abstracta y se convierte en una idealización, la cual permite realizar cálculos y estimar la forma. Se asoció como primer intento un círculo para definir la forma de la Tierra, el cual coincide muy bien en el plano ecuatorial. Esto porque la rotación diaria de la Tierra hace que su masa se agrupe en mayoría en la zona central o ecuatorial, con respecto a los polos. Pero en la zona de los polos no hay igual coincidencia y se distancia la forma real del círculo.

Esta situación motivó a buscar otra forma matemática que lograra solventar la diferencia que existe en los polos con respecto al círculo. Proponiéndose un elipsoide, el cual tiene la posibilidad de achatarse en los polos y con esto ajustar la forma de la Tierra.

Definiendo la figura del elipsoide como un acuerdo matemático compuesto por un semieje mayor y un semieje menor, en donde el semieje mayor se denota con la letra a y el semieje menor se denota con la letra b (Meyer, 2010).

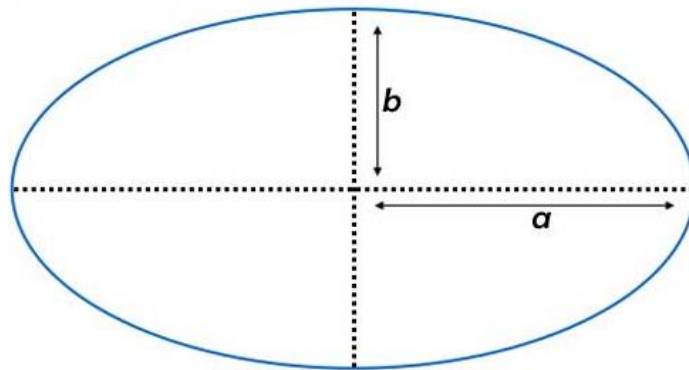


Figura 2.12. Elipsoide con semieje mayor (a) y semieje menor (b). Fuente: <https://matemelga.wordpress.com> (2021).

Unos de los elipsoides más utilizados a nivel mundial es el que se definió en el año 1984, de ahí proviene su nombre *World Geodetic System 84* (WGS84). El cual fue desarrollado por el Departamento de Defensa de los Estados Unidos y su gran auge se originó gracias a que es el utilizado por el Sistema de Posicionamiento Global (GPS). Las mediciones de altura que son referidas a esta superficie matemática se conocen como alturas elipsoídicas h .

2.9. Geoide

La definición de geoide está asociado a un significado físico, conocido como la “figura de la Tierra”. Shalowitz (1938, p. 10) lo describe de la siguiente manera, “*La verdadera figura de la tierra, a diferencia de la superficie topográfica, se toma como la superficie*

que es en todas partes perpendicular a la dirección o a la fuerza de gravedad y que coincide con la superficie media de los océanos”.

Otra definición de geoide se encuentra en el glosario Geodésico (NGS 2009), como la superficie equipotencial del campo de gravedad terrestre que mejor se ajusta, en un sentido de mínimos cuadrados, al nivel medio del mar.

La forma del geoide se considera irregular, de acuerdo con Wolf (2021), el geoide es una superficie equipotencial, la cual se ubica aproximadamente en el nivel medio del mar, el cual es perpendicular en todo punto a la dirección de la gravedad y debido a las variaciones en la distribución de la masa de la Tierra y al efecto de la rotación, el geoide posee una forma irregular.

En la figura 2.13 se ilustra conceptualmente la figura del elipsoide y del geoide, lo cual permite observar que el geoide no es una figura regular y por esta razón no es sencillo definirlo matemáticamente.

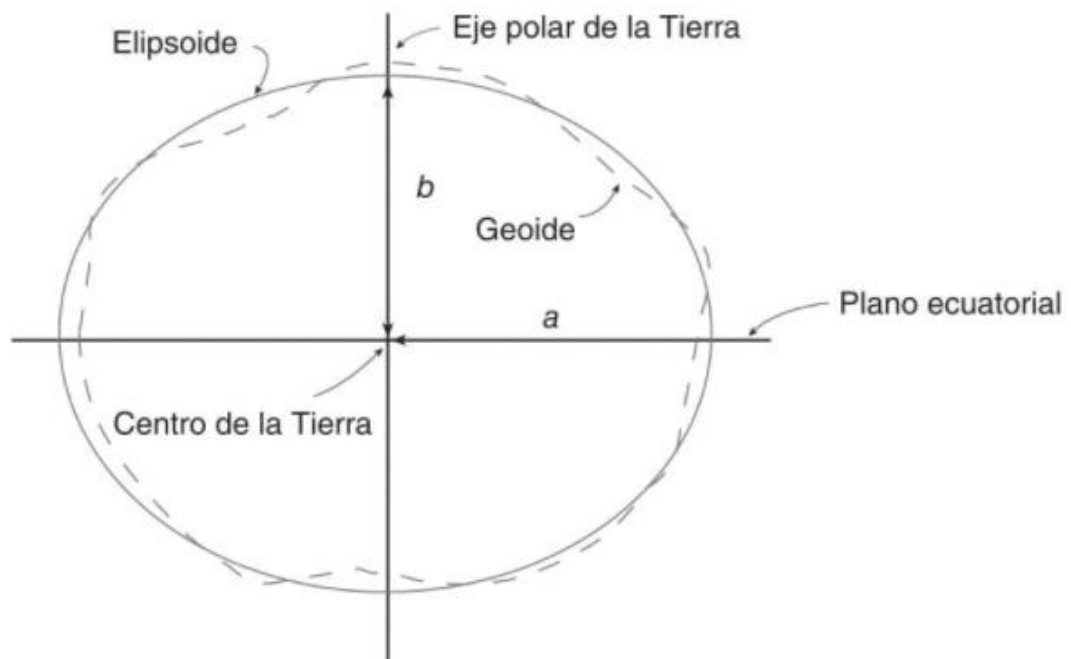


Figura 2.13. Elipsoide y el geoide. Fuente: Wolf (2009).

2.10. Relación entre elipsoide y geoide

El elipsoide al ser una superficie que se describe mediante una forma matemática se considera regular. Mientras que en el caso del geoide es una superficie irregular. Lo que

implica que un mismo punto medido en el terreno podría estar asociado a dos superficies de referencia distintas (Torge & Muller, 2012).

La superficie de referencia asociada al elipsoide considera alturas elipsoidales h , mientras que la superficie de referencia geoidal considera alturas ortométricas H . La ondulación del geode N , permite relacionar la distancia vertical entre estas dos alturas.

La fórmula matemática que permite relacionar ambas superficies es la siguiente:

$$N = h - H \quad (2.5)$$

La altura ortométrica H , es por lo tanto, la distancia medida de manera vertical sobre la superficie física de la Tierra y el Geoide. La intersección con la superficie del geode debe ser de manera perpendicular. Mientras que la altura elipsoidal h es la distancia medida a lo largo de la normal al elipsoide, entre la superficie física de la Tierra y el Elipsoide (Torge & Muller, 2012).

En la figura 2.14 se observa la relación entre la altura ortométrica y la altura elipsoidal.

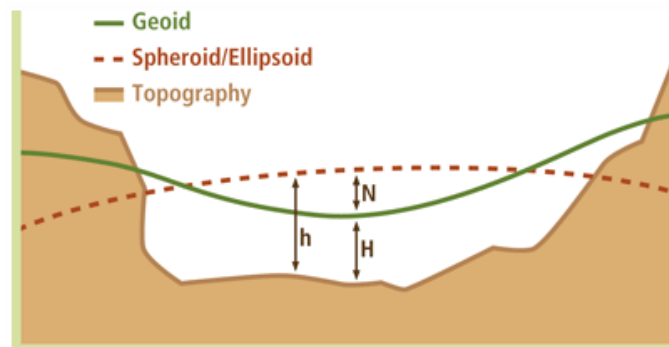


Figura 2.14. Relación entre la altura ortométrica y la altura elipsoidal. Fuente: ESRI (2021).

2.11. Cuasigeoide

El cuasigeoide se define según el glosario Geodésico (NGS 2009), como una superficie no equipotencial, la cual es considerada como muy aproximada al geode, basando su diferencia con este último en que, para su determinación, no se requiere de hipótesis físicas y solamente considera el modelamiento matemático del campo de gravedad normal.

El cuasigeoide es considerada una superficie paralela al teluroide y es obtenida mediante la suma de las anomalías de gravedad al elipsoide, siendo también una función

de la altura normal H_N . El teluroide por su parte, es una superficie observable, aunque no es equipotencial, las mediciones en esta superficie se realizan con nivelaciones, observaciones astronómicas y mediciones de gravedad (Heiskanen, 1985).

Según Heiskanen (1985), el cuasigeoide no es una superficie de nivel, por lo que no tiene significado físico alguno. Siendo idéntica con el geoide en los océanos, porque ahí se cumple que la anomalía de altura ζ , es igual a la ondulación del geoide N .

$$\zeta = N \quad (2.6)$$

Para las demás zonas terrestres que no son océanos la anomalía de altura es aproximadamente igual al geoide. La anomalía de altura se puede calcular de la siguiente manera:

$$\zeta = h - H_N \quad (2.7)$$

En donde:

ζ es la anomalía de altura (m)

h es la altura elipsoidal (m)

H_N es la altura normal (m)

Basado en la formulación de Mikhail Molodensky en 1945, en la cual propone la superficie física terrestre como la superficie límite, esto gracias al desconocimiento de las distribuciones de densidad existentes en el interior de la Tierra. Lo cual da origen a la sustitución del concepto de geoide por el concepto de cuasigeoide. Esta concepción implica que la altura normal H_N y la anomalía de altura ζ , vienen a corresponder con la altura ortométrica H y la ondulación geoidal N , de acuerdo con la figura 2.15.

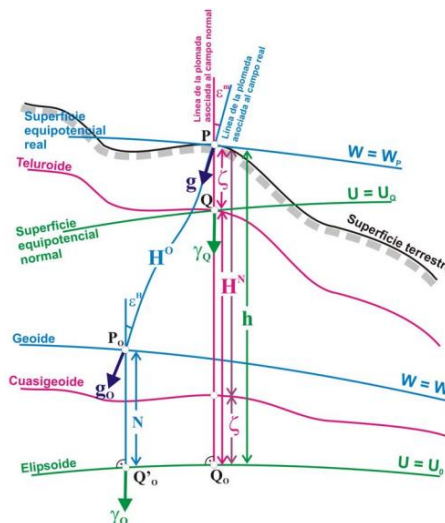


Figura 2.15. Relación entre la ondulación geoidal y la anomalía de altura. Fuente: Kuhn (2002).

2.12. Mediciones con GNSS

El concepto GNSS es definido por Hofman-Wellenhof et al. (2008) como un sistema de posicionamiento satelital basado en el espacio que incluye una o más constelaciones, aumentado según sea necesario para la operación prevista. La cual proporciona información tridimensional de posición, velocidad y tiempo las 24 horas a los usuarios.

Las constelaciones satelitales utilizadas con más frecuencia son la GPS y la GLONASS, estas constelaciones se componen de una red de entre 21 y 30 satélites cada una. Los cuales se ubican a una altura de la superficie terrestre entre los 21000 y 25000km (Berné, 2014).

Los componentes del GNSS de acuerdo con Mena (2008) se mencionan a continuación: segmento espacial, segmento de control y segmento de usuario. El segmento espacial está constituido por las constelaciones de satélites disponibles para realizar las mediciones, entre estas se destacan la GPS y la GLONASS. La distribución de las órbitas de los satélites disponibles garantiza un mínimo de 6 satélites durante las 24 horas del día (Mena, 2008).

El segmento de control está formado por las distintas estaciones en tierra donde se calcula y transmite la información necesaria a los satélites. Para la constelación GNSS la estación principal es conocida como *Consolidated Satellite Operation Center*, la cual reúne la información procedente de las estaciones de seguimiento, además de las efemérides de referencia (Mena, 2008) y para la constelación GLONASS la estación principal es llamada Sistema Central de Control (Berné, 2014).

El segmento usuario está formado por los equipos utilizados para la recepción y uso en cualquier forma de las señales emitidas por los satélites. Es considerado el único segmento abierto a las casas comerciales y también al público en general. Lo cual permite la libertad en cuanto al diseño y fabricación de los receptores (Mena, 2008).

De acuerdo con Mena (2008), el máximo rendimiento en cuanto a duración del tiempo de levantamiento resulta en la modalidad cinemática, la cual implica que el receptor está en movimiento, mientras que, si se requiere aumento de la precisión, se logra con el posicionamiento del receptor de manera estática.

Dentro de los métodos para la determinación del posicionamiento a través de tecnología GNSS se encuentra el método diferencial. Las mediciones diferenciales se basan en la colocación de un receptor fijo con coordenadas conocidas (vértice A) y otro receptor en el sitio que se desee realizar la medición, este último receptor puede ser móvil

o estático (vértice B). A partir de las coordenadas conocidas del vértice A y de la configuración de los satélites observados en cada momento, es posible comparar las pseudodistancias con el vértice B (Mena, 2008) como se observa en la figura 2.16.

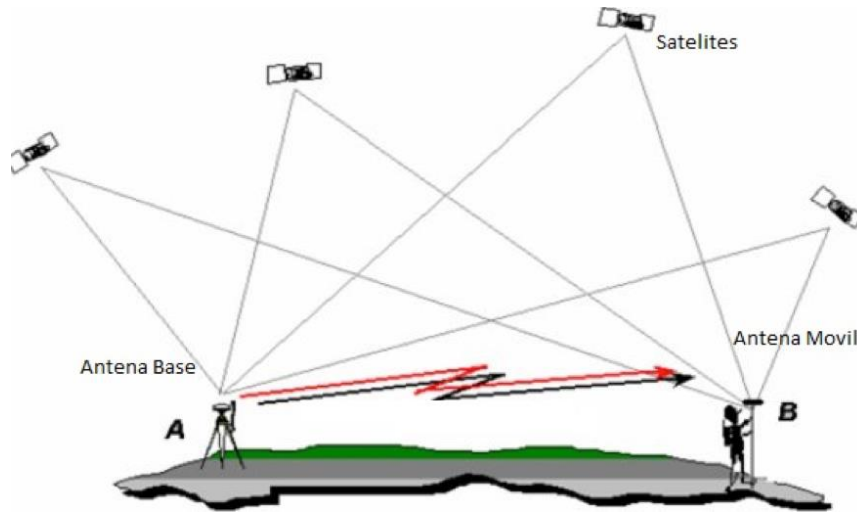


Figura 2.16. Método diferencial en GNSS. Fuente: Mena (2008).

Otra posibilidad consiste en calcular en el vértice A los incrementos ΔX , ΔY y ΔZ entre las coordenadas conocidas y las observadas en cada instante. A esta técnica de medición se le conoce como posicionamiento cinemático en tiempo real (Mena, 2008).

La ecuación matemática que permite calcular las coordenadas del vértice desconocido se describe de la siguiente manera:

$$c\Delta t_i = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2} \quad (2.8)$$

en donde:

c es la velocidad de la luz

Δt_i es el tiempo de la señal del satélite al receptor

(x, y, z) son las coordenadas del receptor o coordenadas desconocidas

(x_i, y_i, z_i) son las coordenadas del vértice conocido

Las mediciones en posicionamiento cinemático en tiempo real se pueden clasificar de varias maneras dependiendo del protocolo de comunicación que utilicen, pudiendo ser vía internet y vía radio, así también, como las redes activas que permiten la creación de estaciones virtuales de referencia o *Virtual Reference Station (VRS)*.

Las mediciones en tiempo real VRS requieren de una red de estaciones de medición continua que le permitan calcular la posición del objetivo deseado. Además, como se mencionó anteriormente requieren de un sistema de transporte de datos, que en este caso es vía internet. Lo cual permite obtener una solución en el mismo instante de efectuar la

medición. La precisión horizontal obtenida oscila en el rango de los 2-3cm según Hoyer (2012). En la figura 2.17 se ilustra el concepto anterior.

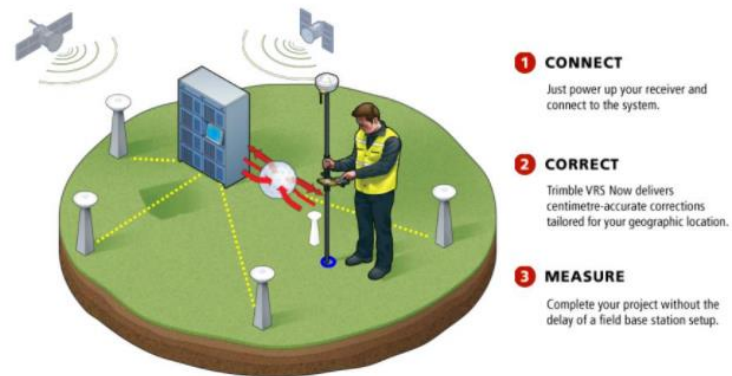


Figura 2.17. Esquema de medición GNSS en modalidad tiempo real VRS. Fuente: Trimble (2021).

3. ÁREA DE ESTUDIO E INFORMACIÓN UTILIZADA

3.1. Área de estudio

Costa Rica presenta características particulares en su territorio en cuanto a relieve y vegetación, las cuales pueden inferir en los resultados obtenidos a través de la metodología trazada para realizar los cálculos, por dicha razón es que se dedica esta sección para realizar una descripción de la zona de estudio.

Gracias a la riqueza natural de la provincia de Guanacaste que brinda recursos geotérmicos e hídricos, los cuales, combinados con las formaciones montañosas y llanuras, ofrecen las diferencias de elevación requeridas para generar energía eléctrica.

La tenencia de proyectos hidroeléctricos y geotérmicos en la provincia de Guanacaste ha motivado al ICE a adquirir información de origen LiDAR aéreo para realizar el planeamiento y modernización de las Plantas Hidroeléctricas: Arenal, Sandillal y Corobicí, así como en las Plantas Geotérmicas: Miravalles y Las Pailas.

El ICE no cuenta con un sensor LiDAR aéreo, por lo que esta información tiene que ser contratada mediante la figura de licitación pública, a una empresa especializada en el levantamiento y procesamiento LiDAR.

Específicamente se consideró para esta investigación una información de origen LiDAR aéreo, se eligió específicamente una línea de transmisión ubicada en la provincia guanacasteca, que abarca aproximadamente 50 kilómetros lineales. Los cuales van del distrito de Bagaces a Liberia, con un ancho de 300 metros. Para un área aproximada de 15km². La razón de dicha elección se basó en la actualidad de la información, siendo esta zona la más reciente contratación realizada por el ICE, específicamente en el año 2018.

La zona de estudio está ubicada entre las coordenadas de la proyección cartográfica CRTM05, iniciando en Este 326816m y Norte 1161153m, finalizando en Este 360782m y Norte 1154307m.

Las elevaciones presentas en la zona están en un rango de los 8m a 108m sobre el nivel medio del mar.

Hay sectores que son llanuras y otros en los cuales hay montañas, lo que genera pendientes de aproximadamente 45°, en donde existen diferencias de 100 metros de elevación en 100 metros horizontales.

También es una zona donde existen cauces de ríos, vegetación tipo potrero y vegetación densa tipo bosque.

Como se muestra en la figura 3.1 el área está compuesta por una línea que tiene un ancho de 300m, lo cual también podría ser considerado como un levantamiento lineal o areal.

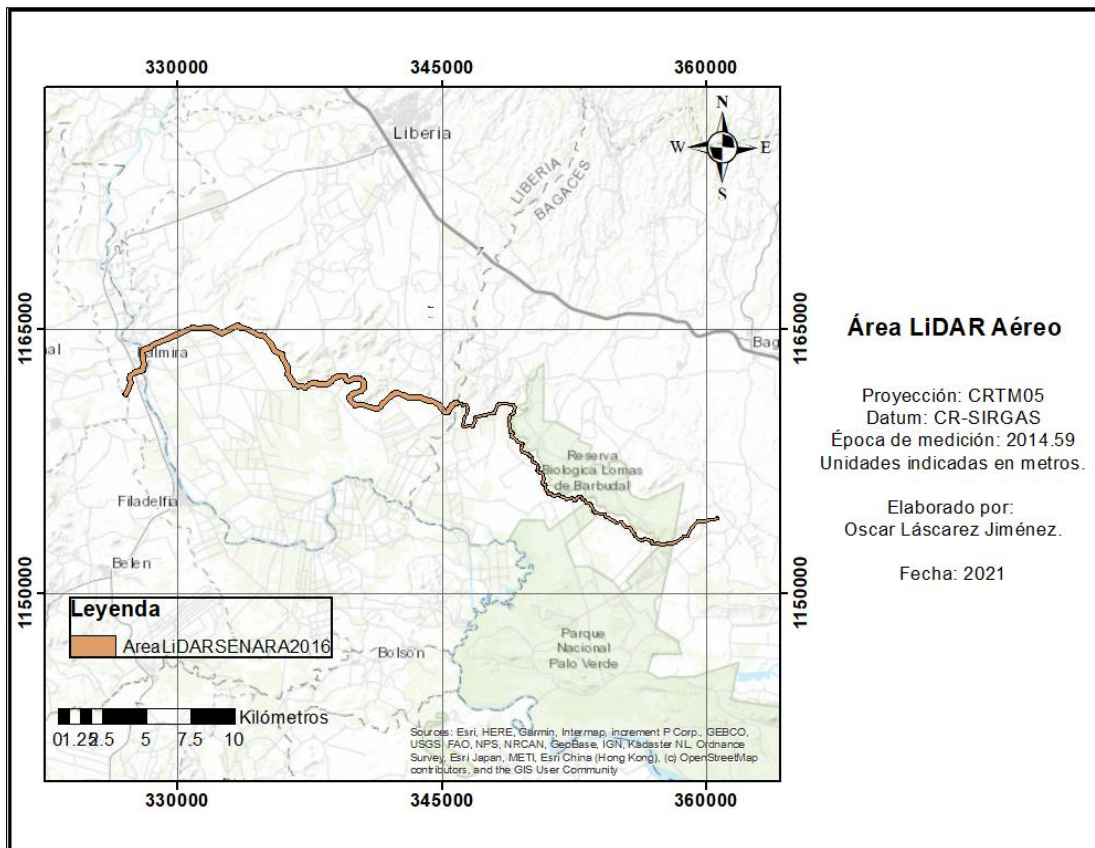


Figura 3.1. Zona con información LiDAR aéreo.

3.2. Mediciones GNSS

El ICE dispone de una red de Estaciones de Medición Continua (EMC), distribuidas estratégicamente en Costa Rica. Esta red permite realizar correcciones de datos GNSS en tiempo real, utilizando el protocolo de transmisión vía internet, en la modalidad del VRS. Las EMC están compuestas por antenas de recepción GNSS, las cuales registran mediciones de manera continua, 24 horas al día, durante los 7 días de la semana y durante todo el año.

A inicios del año 2010, el ICE instaló las primeras siete EMC, ya para el año 2011 contaba con 14 estaciones de referencia y actualmente dispone de un total de 24. Los receptores instalados son geodésicos, de la casa comercial *Trimble*, con las características necesarias para realizar mediciones de manera continua. Cumpliendo con requisitos establecidos como que el receptor permita rastrear simultáneamente por lo menos 10

satélites, el tiempo de rastreo debe permitir intervalos de medición mínimos de 30 segundos, entre otros. En la figura 3.2 se muestra la ubicación de dichas estaciones en el territorio costarricense.

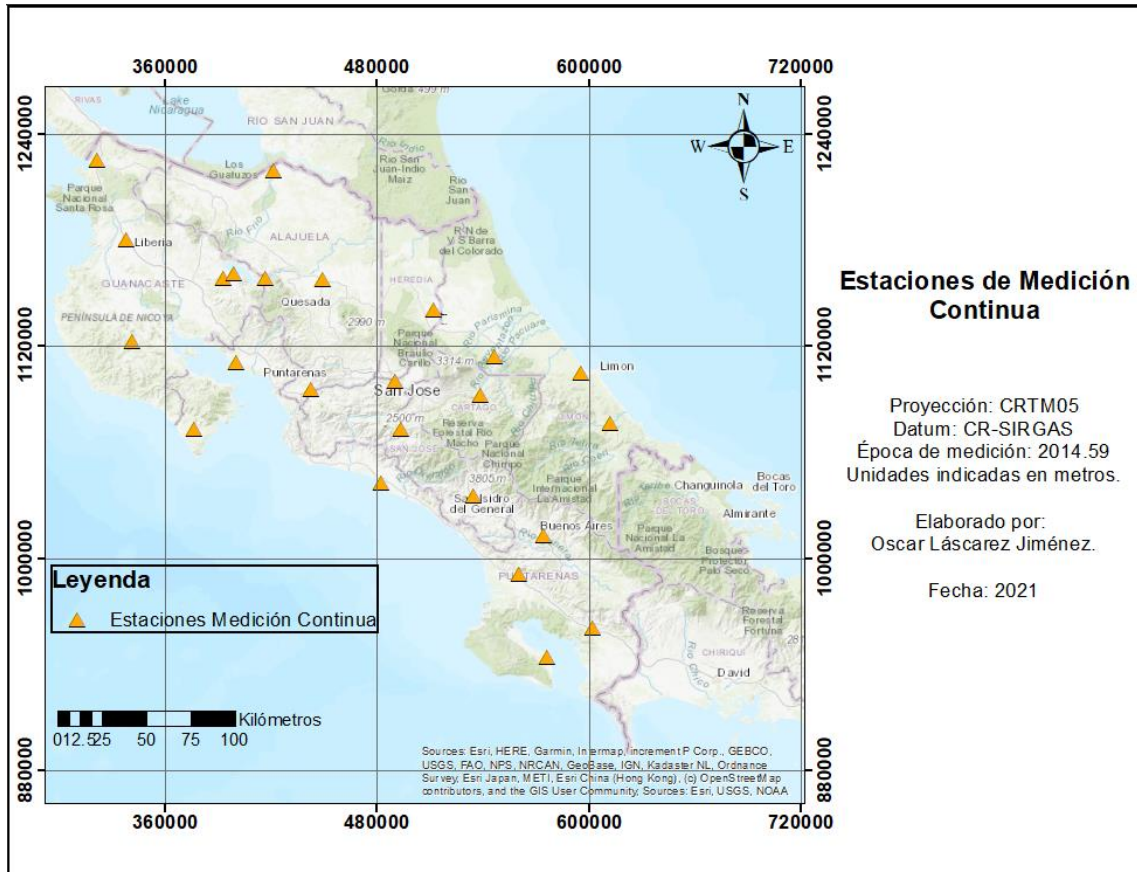


Figura 3.2. Distribución de las estaciones EMC del ICE en Costa Rica. Fuente: Instituto Costarricense de Electricidad, Área de Topografía (2021).

Las estaciones de medición continua están ubicadas en terrenos donde la visual es apta para mediciones satelitales, libres de objetos que interfieran en la recepción satelital, además están construidas en elementos de concreto para garantizar la estabilidad de antena. En la figura 3.3 se muestra la estación de referencia ubicada en la provincia de Guanacaste, específicamente en el cantón de Tilarán, distrito de Tronadora.



Figura 3.3. Estación de referencia del ICE, ubicado en Tronadora, Guanacaste. Fuente: Instituto Costarricense de Electricidad, Área de Topografía (2021).

El método de corrección de coordenadas en tiempo real VRS, este viene a ampliar el alcance de cobertura y comunicación que permite la modalidad de *Real Time Kinematic* (RTK). En donde en el RTK se requiere de una base y un receptor, que estén ubicados en radio aproximado de 10km a 15km entre estos, dependiendo de la zona donde se está realizando la medición (Meyer, 2010).

El VRS plantea la creación de una estación de referencia virtual situada a tan solo unos pocos metros del equipo receptor utilizado en el campo para la medición.

En la figura 3.4 se observa la red de estaciones de medición continua, en color verde están las estaciones, las cuales se unen mediante vectores que permiten el ajuste de dicha red. Con los cual se calcula el ajuste de las coordenadas.

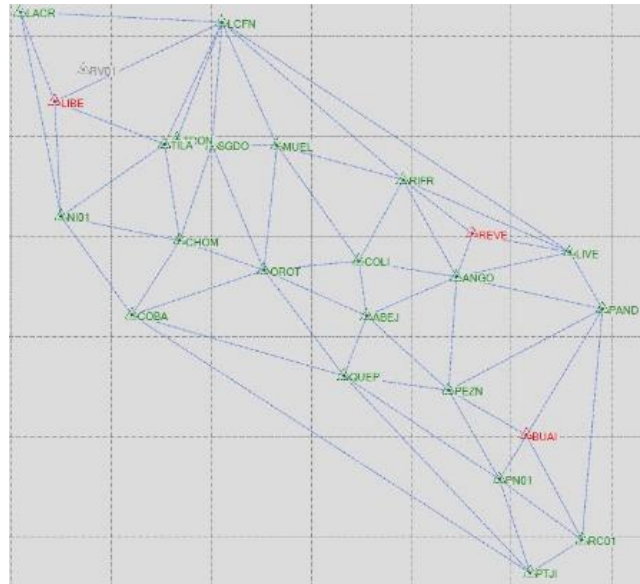


Figura 3.4. Red de ajuste de las estaciones de medición continua del ICE. Fuente: Instituto Costarricense de Electricidad, Área de Topografía (2021).

Los resultados de coordenadas ajustadas en tiempo real y utilizando el protocolo de comunicación VRS, permiten obtener una precisión horizontal en el rango de 2cm a 3cm y en cuanto a la precisión vertical de aproximadamente 5cm (Mena, 2008). Estos resultados se logran obtener en un tiempo de medición de 5 segundos posterior a la inicialización correcta del receptor GNSS.

Las estaciones de referencia del ICE están enlazadas a las estaciones de medición continua del Registro Nacional, lo cual brinda una solución en la proyección oficial CRTM05; y en la parte vertical se utiliza el modelo geoidal EGM08.

El departamento de Topografía del ICE cuenta con mediciones topográficas en distintas zonas del territorio costarricense, lo cual permitió para esta investigación que se eligieran mediciones realizadas entre el año 2019, 2020 y 2021. Estas observaciones topográficas fueron escogidas, tratando lo más posible, con una distribución uniforme y homogénea en todo el territorio nacional, además, que contaran con condiciones de elevación y cobertura vegetal distintas.

En la figura 3.5 se muestra la ubicación de los 50 puntos de control medidos con equipo GNSS, utilizando el protocolo de comunicación vía internet, en la modalidad VRS. Los cuales fueron utilizados para calcular las diferencias entre los MDE de origen satelital y el MDE de origen LiDAR aéreo, además de ser elegidos de manera tal que permita obtener una distribución regular dentro del territorio costarricense.

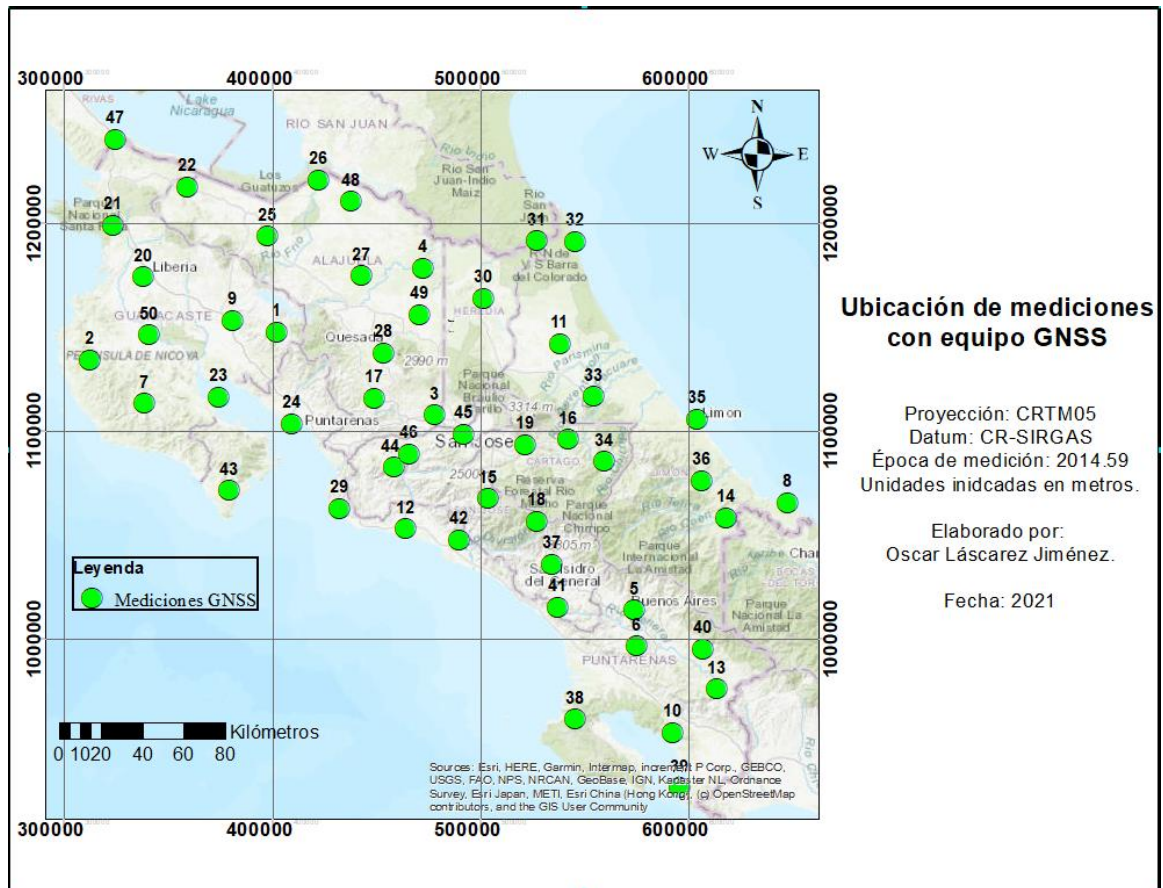


Figura 3.5. Ubicación de los puntos GNSS medidos en campo.

En la tabla 3.1 se muestran las 50 mediciones GNSS elegidas como puntos de control, la proyección utilizada fue CRTM05, datum CR-SIRGAS, época de medición 2014.59. En dicha tabla se muestran los valores de las coordenadas este, norte y altura ortométrica (H) con el modelo geoidal EGM08.

Tabla 3.1. Mediciones con GNSS en modalidad tiempo real VRS.

Mediciones GNSS en la proyección cartográfica CRTM05							
Punto	Este(m)	Norte(m)	H EGM08 (m)	Punto	Este(m)	Norte(m)	H EGM08 (m)
1	401725.008	1147546.044	955.817	26	421649.696	1220576.997	45.471
2	311947.644	1134154.083	37.103	27	442167.473	1174621.753	131.526
3	477255.953	1107621.338	958.199	28	453187.492	1137367.005	1064.928
4	471988.829	1178191.092	69.884	29	431654.246	1062568.577	4.269

Mediciones GNSS en la proyección cartográfica CRTM05

Punto	Este(m)	Norte(m)	H EGM08 (m)	Punto	Este(m)	Norte(m)	H EGM08 (m)
5	573304.563	1013791.819	370.819	30	500791.783	1163620.304	33.566
6	574396.159	996452.086	755.946	31	526463.625	1191395.014	8.586
7	337999.548	1113164.615	168.175	32	545127.154	1191167.559	2.166
8	647430.537	1065511.409	1.962	33	554041.734	1116563.12	66.162
9	380521.075	1153005.167	86.165	34	558919.834	1085237.768	1221.618
10	591992.027	955037.057	5.203	35	603800.624	1105746.459	61.713
11	537702.282	1141975.745	42.166	36	605866.187	1076021.849	55.588
12	463526.654	1052781.203	5.422	37	533676.766	1035909.156	719.665
13	613300.551	975948.343	995.326	38	544844.228	961424.268	431.73
14	617391.191	1058078.304	76.176	39	595422.758	928351.3	39.045
15	503253.644	1067392.565	1543.55	40	606561.088	995171.509	801.798
16	541662.481	1095892.706	767.96	41	536659.909	1015290.361	1112.41
17	448701.034	1115619.577	1056.214	42	488980.687	1047530.954	76.565
18	526816.826	1056488.479	3468.449	43	378851.766	1071346.37	160.982
19	521202.417	1093325.74	1437.432	44	457798.955	1082403.551	958.345
20	337224.111	1174011.225	111.618	45	491435.492	1098367.585	1202.634
21	323194.7	1198820.738	312.01	46	465481.37	1088867.149	1108.84
22	358677.462	1217143.569	225.056	47	323979.183	1240246.107	45.025
23	373919.07	1116222.318	8.64	48	437441.672	1210368.242	60.912
24	408971.382	1103438.263	3.692	49	470028.653	1155827.172	155.606
25	397350.965	1193586.691	123.85	50	340236.901	1146176.82	24.554

3.3. Modelos de geopotencial global.

Los modelos de geopotencial global (MGG) son un conjunto de coeficientes gravitatorios, los cuales son considerados como una referencia vertical y representan la forma del geoide estático para un determinado momento. Estos modelos están definidos por coeficientes armónicos esféricos, además del grado y orden son variables espaciales o geométricas que regulan la resolución, espaciado o tamaño del modelo (Hoyer, Wldermann, Suarez, & Hernández, 2004).

Usualmente los modelos geoidales son determinados mediante observaciones satelitales, terrestres o marinas, o en su defecto la combinación de algunas o todas estas mediciones. En los últimos años las técnicas satelitales mediante la extensión del grado han permitido mejorar la resolución de los MGG.

3.3.1 Modelo geoidal EGM96s.

El modelo geoidal *Earth Gravitational Model 96s* (EGM96s, por sus siglas en inglés), fue calculado en colaboración por la *National Imagery and Mapping Agency* (NIMA, por sus siglas en inglés), la NASA y la *Ohio State University*, en el año 1996. El cual es un modelo gravitacional global de la Tierra (incluye toda la Tierra), que proporciona un conjunto de datos geopotenciales normalizados hasta un grado y orden de 360. Este MGG incluye una solución combinada limitada al grado y orden 70, una solución de bloque diagonal del grado 71 al 359 y una solución en cuadratura de 360 grados (Lemoine et al. 1998).

El EGM96s utilizó datos de anomalías de gravedad generadas de las misiones satelitales *European Remote-Sensing Satellite 1* (ERS-1) y *Geodetic Satellite* (Geosat), así como observaciones del seguimiento de 20 satélites más, con sistemas como el *Satellite Laser Ranging* (SLR) y el GPS (Sevilla, 2003).

Los datos gravimétricos fueron calculados por la NIMA que incluyó información obtenida mediante vuelos en zonas como Groenlandia, la Antártica y el Ártico, permitiendo cubrir áreas que anteriormente no estaban incluidas en otros modelos geoidales (Sevilla, 2003).

En la figura 3.6 se muestra el EGM96s, el cual tiene un tamaño de 0.015 grados por 0.015 grados, además incluye una escala gráfica con los valores de la anomalía de altura, siendo los colores rojos los valores mayores, lo cual coincide con la cordillera de Talamanca.

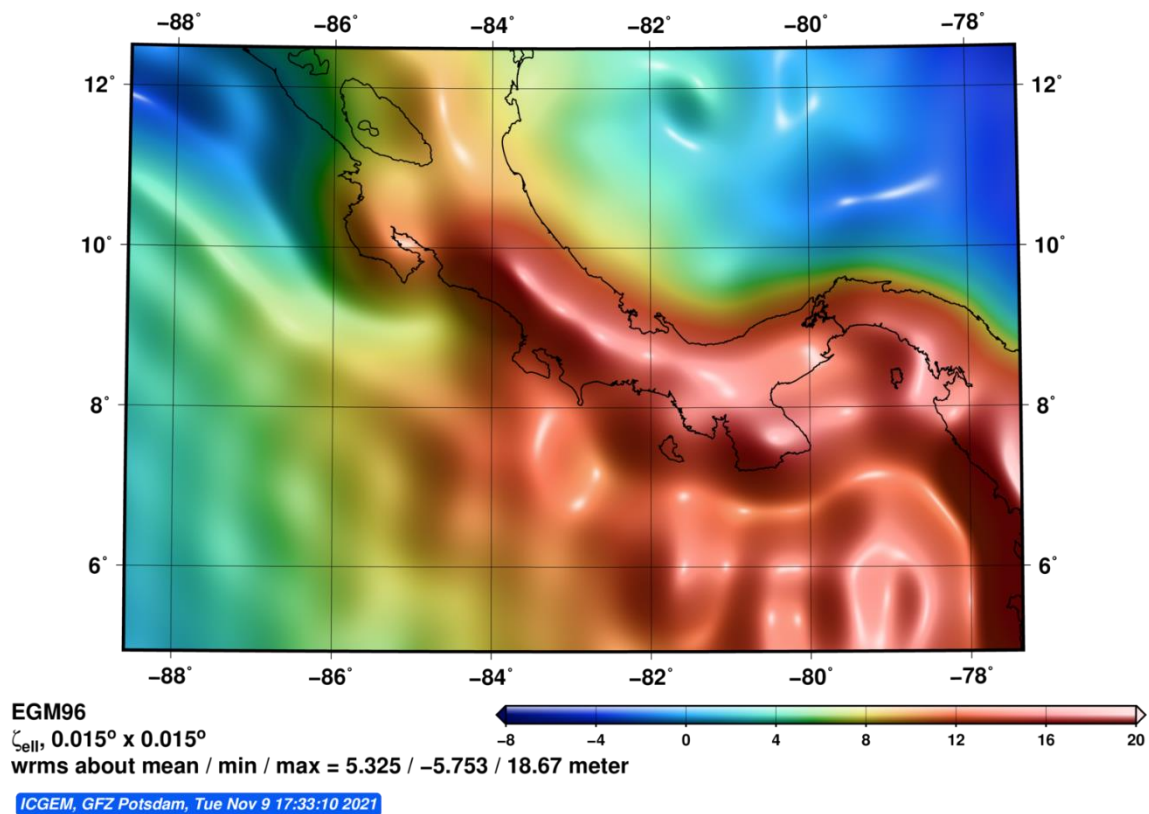


Figura 3.6. Modelo geoidal EGM96s. Fuente: ICGEM (2021).

3.3.2 Modelo geoidal EGM2008.

El modelo geoidal *Earth Gravitational Model 2008* (EGM08), fue calculado por la *National Geospatial-Intelligence Agency* en el año 2008. Este modelo gravitacional de la Tierra global fue desarrollado mediante una combinación de mínimos cuadrados del modelo gravitacional ITG-GRACE03S con anomalías gravitacionales de aire libre en una cuadrícula de 5 minutos de arco (NGA, 2021)

EL EGM08 está formado por una grilla que incluye datos terrestres gravimétricos, altimétricos y de gravedad satelital. Está completo hasta el grado y orden 2159, conteniendo también coeficientes adicionales que le permiten llegar hasta el grado 2190 y orden 2159 (Pavlis et al., 2012).

Se caracteriza por cubrir áreas con datos de gravedad de alta calidad, donde hay diferencias entre las ondulaciones del geoide EGM08 y valores medidos en campo mediante técnicas GNSS o nivelaciones directas, en el rango de $\pm 10\text{cm}$ (Pavlis et al., 2012).

El EGM08 representa mejoras significativas sobre el EGM96s, en la resolución es considerado 6 veces mejor, además en cuanto a la precisión en los valores de gravedad lo mejora en un rango de 3 a 6 veces. Este modelo geoidal es considerado un hito, ya que integra datos gravimétricos precisos y detallados en un solo modelo (Pavlis et al., 2012).

En la figura 3.7 se muestran las zonas del norte de Costa Rica con una coloración verde, lo cual representa que los valores de la anomalía de altura son aproximadamente entre 7 y 10, mientras que los colores rojos que se ven en la cordillera de Talamanca, oscilan entre 16 y 18.

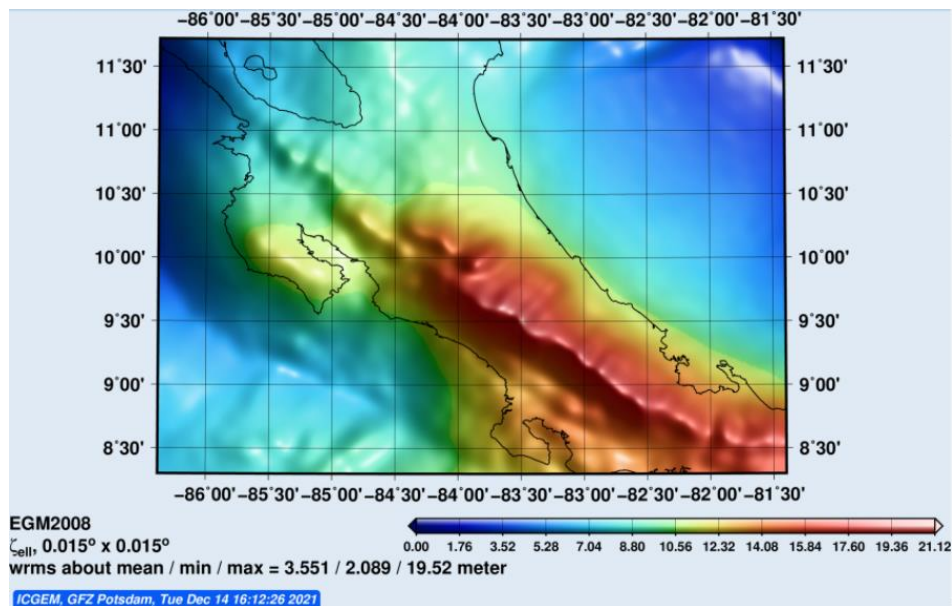


Figura 3.7. Modelo geoidal EGM08. Fuente: ICGEM (2021).

En la figura 3.8 se muestra una vista en tres dimensiones del EGM08, lo cual viene a complementar el entendimiento físico de los valores de las alturas geoidales, respetando el signo positivo o negativo respectivo.

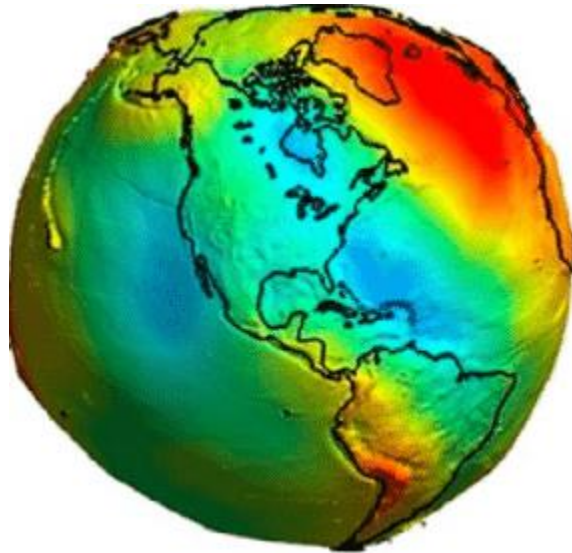


Figura 3.8. Modelo geoidal EGM08 en tres dimensiones. Fuente: Pavlis et al., 2012.

3.3.3 Modelo Geoidal Costarricense-Regional calculado por el Método de Stokes-Helmert.

El modelo geoidal Costarricense-Regional calculado por el Método de Stokes-Helmert GCR-RSH-2020, fue calculado en la Escuela de Ingeniería Topográfica de la Universidad de Costa Rica en el año 2020. Este modelo gravitacional es local y específico para Costa Rica.

Los datos que permitieron realizar el cálculo fueron derivados de la combinación de distintas fuentes satelitales como: datos en tierra de la NGA y datos en tierra y mar del *Bureau Gravimetrique International* y datos en alta mar de la *National Oceanographic and Atmospheric Agency*, observaciones de gravedad marina y terrestre, los cuales posteriormente fueron transformados en anomalías de aire libre y de Helmert (Garbanzo-León et al., 2020).

Posibles espacios de vacíos de información gravimétrica fueron llenados mediante procesos de interpolación con datos del modelo geopotencial GECO, el cual es una combinación de datos del EGM08 y *Global Gravity Field Models and Grids* (GOCE). Esta interpolación utilizó anomalías de Bouguer, permitiendo obtener una grilla de 1 segundo por 1 segundo de resolución (Garbanzo-León et al., 2020).

Este modelo geoidal generó valores de anomalía de altura máximos de 15.733m y valores mínimos de 3.032m, basados en el valor del geopotencial de referencia vertical WGS84. Las diferencias obtenidas entre el modelo geoidal GCR-RSH-2020 y el modelo

geoidal GECO son de aproximadamente 0.5m a 1.5m. Obteniendo los mayores valores en las zonas montañosas (Garbanzo-León et al., 2020).

Este modelo geoidal GCR-RSH-2020 representa una mejora en la resolución espacial, además contiene una mayor cantidad de muestras de mediciones GNSS o nivelaciones y mediciones de gravedad terrestre (Garbanzo-León et al., 2020).

Como se observa en la figura 3.9, los valores de anomalía de altura mayores coinciden donde se ubica la cordillera de Talamanca. Además, tiene una similitud con el EGM08.

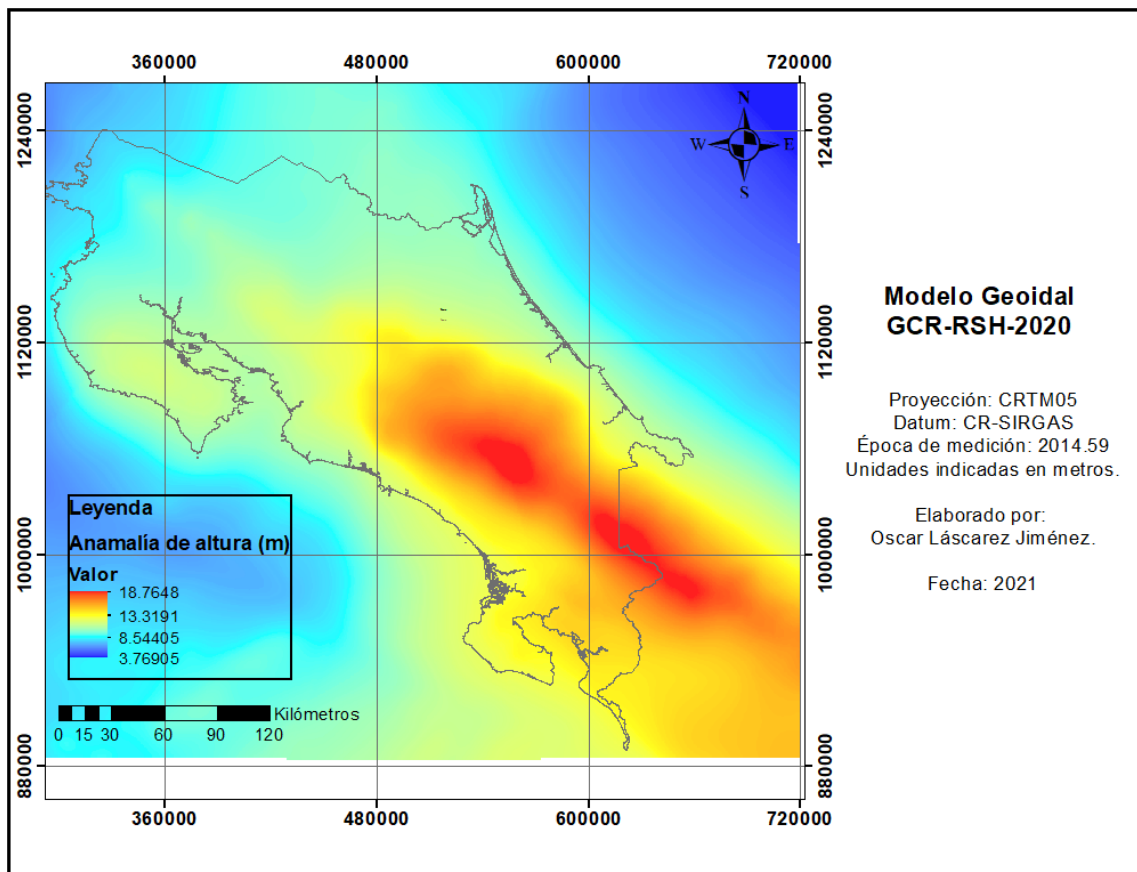


Figura 3.9. Modelo geoidal GCR-RSH-2020 en dos dimensiones.

4. METODOLOGÍA RESULTADOS Y ANÁLISIS

La metodología consistió en la normalización de la información de los Modelos Digitales de Elevación de origen satelital y LiDAR aéreo, con ayuda de los Sistemas de Información Geográfica con lo cual se permitió realizar los cálculos de las diferencias o deltas de alturas ortométricas *H*.

Además, se realizaron mediciones con equipos GNSS en el terreno, las cuales funcionaron para controlar y validar las propuestas de mejoramiento a los modelos digitales de elevación de origen satelital.

4.1. Normalización de datos LiDAR

Los datos provenientes del LiDAR aéreo fueron proporcionados por el Instituto Costarricense de Electricidad, además, tuvieron que ser revisados para conocer las características, ordenamiento y metadatos de los mismos. Este tipo de observaciones pueden estar clasificadas o sin clasificar. El proceso de clasificación consiste en agrupar puntos que describen un mismo objeto que reflejó el pulso láser, los códigos de clasificación fueron definidos por la Sociedad Americana de Fotogrametría y Teledetección (ASPRS, 2011).

Los formatos más comunes para representar esta variedad de información son archivos con extensión LAS 1.1, 1.2, 1.3 y 1.4.

Para la clasificación de los datos LiDAR aéreo se pueden emplear softwares específicos que se ocupan de realizar esta función de forma automatizada, en los casos que se requirió. Estos paquetes informáticos tienen rutinas programadas para determinar atributos como la intensidad, que es la energía con la cual retorna el impulso láser al sensor, esta varía dependiendo con el material en el que sea reflectada. La mayor energía se recibe al reflejarse con materiales duros como el suelo, mientras que si el rebote proviene de un choque con vegetación es menor que el anterior, debido a que la clorofila absorbe gran parte del rayo láser (Fagua et al. 2011).

Otro atributo analizado en la clasificación es la altura, la cual considera la distancia recorrida del rayo láser desde el sensor hasta el punto de rebote y el regreso al sensor, siendo los puntos con más recorrido los puntos más bajos y por consiguiente los puntos con menos recorridos los puntos más altos, permitiendo esto clasificar los puntos en bajos, medios y altos (García et al. 2009).

En la figura 4.1 se muestra una nube de puntos obtenida con tecnología LiDAR aéreo que está clasificada, agrupada por capas y colores distintos, la vegetación baja, media y alta está representada con el color verde, mientras que el terreno está representado en color café. La información corresponde a datos obtenidos con tecnología LiDAR aéreo.

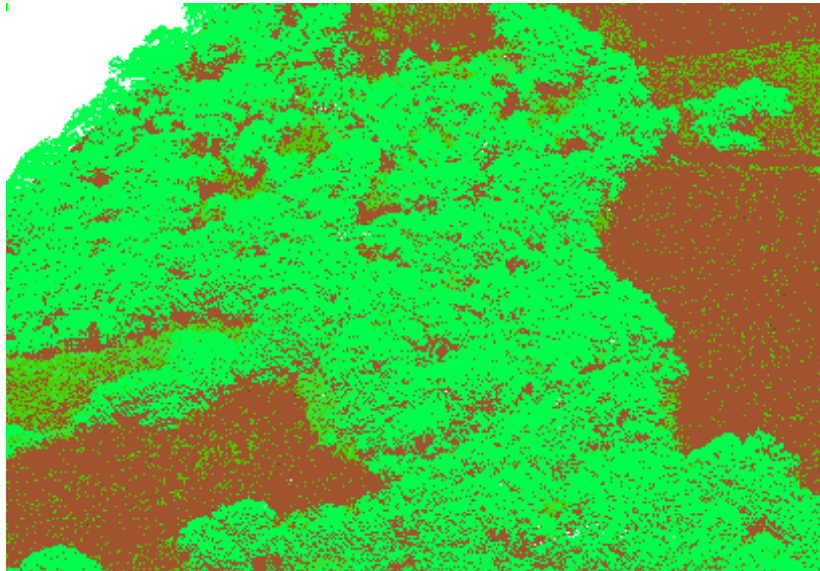


Figura 4.1. Nubes de puntos clasificada por bandas de colores, color verde representa vegetación y color café representa terreno.

La información proveniente de los LiDAR aéreos generalmente se secciona o divide a lo largo de la zona de levantamiento, para evitar que se integre en un solo archivo con la finalidad de facilitar su manejo computacional, debido a la gran cantidad de datos. Pero el interés del usuario es trabajar con la información completa e integrada, esto se puede lograr utilizando la función *dataset LAS*, la cual es propia del software ArcGIS.

Esta función genera un archivo que agrupa los distintos archivos extensión *.LAS* y hace referencia a los datos, permitiendo la utilización del total de la información con un mejor rendimiento de procesamiento computacional.

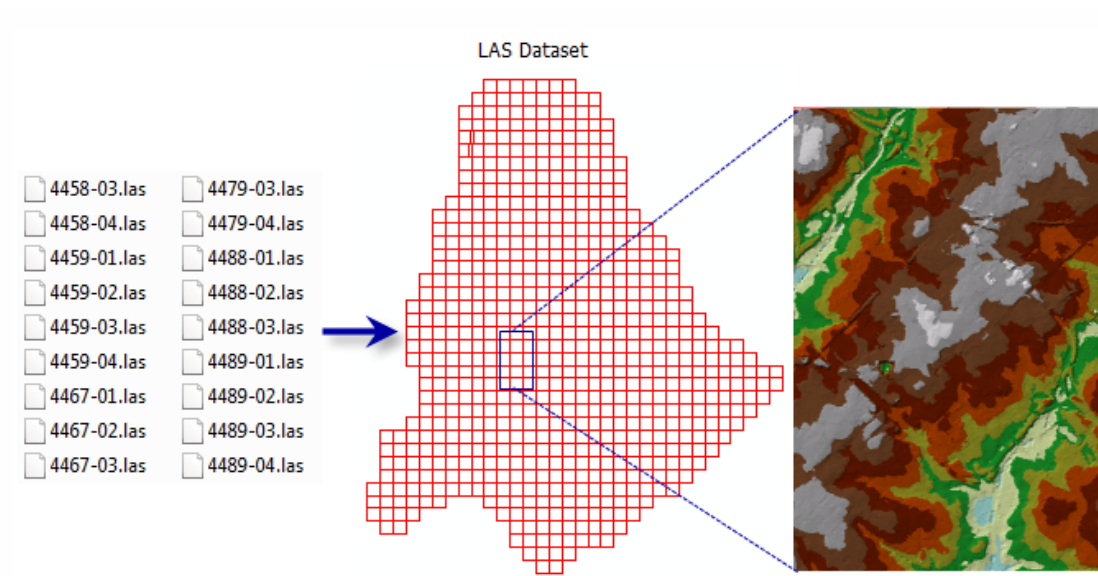


Figura 4.2. Proceso de creación de un dataset en ArcGIS. Fuente: ESRI (2021).

El dataset LAS genera una extensión .lasd. Esta función trabaja solamente para datos de LiDAR Aéreo. En la figura 4.3 se muestran algunos de los archivos extensión .LAS que se utilizaron.

Nombre








-  326511610
-  326511615
-  327011610
-  327011615
-  327011620
-  327011625
-  327511620

Figura 4.3. Archivos con información LiDAR aéreo cuya extensión es .LAS.

Si los archivos .LAS están clasificados se puede seleccionar, por ejemplo sólo el terreno o sólo la vegetación. Para este caso en particular solo se utilizaron los datos con la clasificación de terreno por ser el objeto de estudio, lo cual va a permitir generar un modelo de elevación basado en esta información, excluyendo la vegetación, edificaciones, elementos urbanos, caminos y demás elementos que no pertenecían a esta categoría.

Finalmente, se integraron en el dataset los distintos archivos .LAS lo que permitió visualizar los datos como una nube de puntos, y a su vez su manipulación de forma integrada, rápida y ágil.

El dataset creado se puede convertir en un archivo ráster, lo cual permite realizar operaciones matemáticas sencillas como sumas y restas, también es posible generar cálculos estadísticos, entre otras funciones. Al convertirlo en formato ráster permite homologar el formato en el que se analizó la información LiDAR aéreo y la información satelital (ESRI, 2021).

Para convertir el dataset a ráster se utilizó la función *LAS Dataset to raster*, en el software ArcGIS. Donde se definieron ciertos parámetros: como el método de interpolación, para este caso se eligió interpolador IDW debido a que la distribución de los datos utilizados es muy regular en cuanto a distancia o separación entre estos; también se debe precisar el tamaño de celda o pixel para ráster a generar, eligiendo el tamaño de pixel de treinta metros con setenta centímetros por treinta metros con setenta centímetros, aproximadamente, esto para hacerlo coincidir con el tamaño de celda de los ráster de los modelos digitales de elevación de origen satelital.

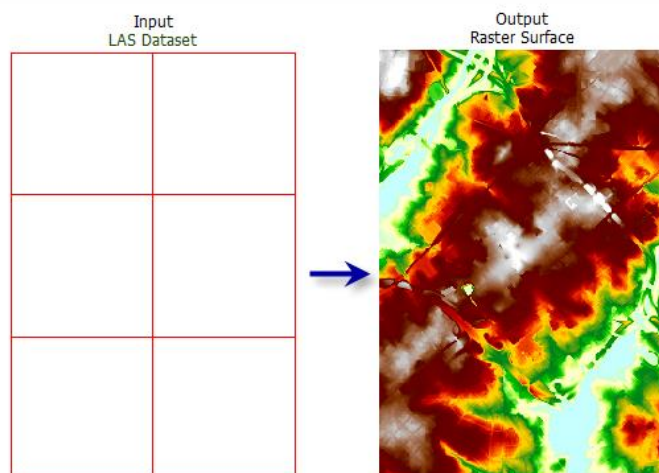


Figura 4.4. Conversión de formato .LAS a ráster. Fuente: ArcGIS (2021).

Posterior a realizar el proceso de interpolación, en el cual también se definió el tamaño de pixel de aproximadamente 30 metros para el MDE de origen LiDAR aéreo, coincidiendo con el tamaño original de los MDE de origen satelital.

También fue posible asociar una escala de colores a cada pixel, la cual varía en cada diferencia de elevación que tenga el archivo ráster. Si la elevación no varía entre pixeles se mantiene del mismo color. Para este caso se definió los tonos azules para las

elevaciones bajas, tonos amarillos intermedios y los tonos rojos para las elevaciones altas. Visualizándose como se muestra en la figura 4.5.

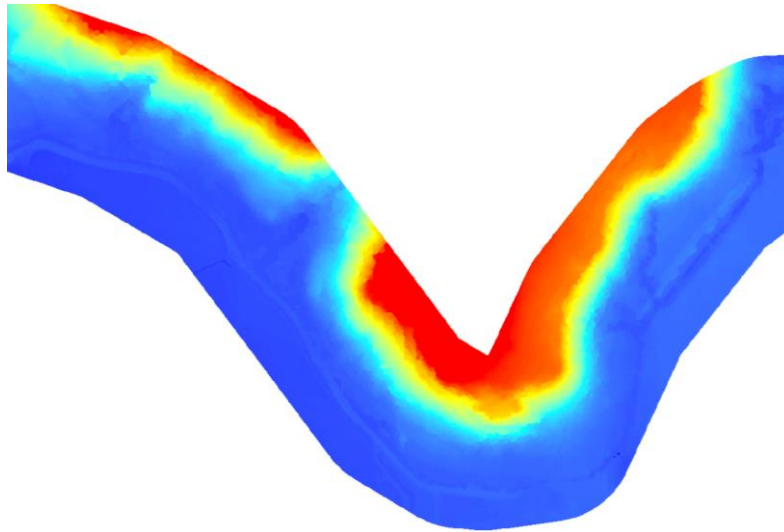


Figura 4.5. Modelo digital de elevaciones origen LiDAR aéreo en formato ráster con un tamaño de pixel de 30m por 30m.

4.2. Descarga de modelos digitales de elevación satelitales

La descarga de los modelos de elevación de origen satelital en formato ráster se realizó desde la página oficial de la NASA <https://www.nasa.gov>, en la cual está disponible la información de la misión de la *Shuttle Radar Topography Mission*.

Dentro de la página de la NASA, se debe seleccionar la región que se desea descargar el modelo ráster, la cual presenta un modelo ráster con una separación de un arcosegundo, lo cual tiene un tamaño de celda o de pixel de aproximadamente treinta metros por treinta metros.

Para la descarga se utilizó la herramienta de región, la cual consiste en seleccionar el área que se desee descargar, como se muestra en la figura 4.6 se eligen los cuadros con borde en color verde del área deseada.



Figura 4.6. Selección del área a descargar del Modelo Digital de Elevaciones origen satelital NASA. Fuente: NASA (2021).

También se descargó la información de la misión satelital japonesa *ALOS World 3D* (AW3D30), desde la página de la JAXA <https://global.jaxa.jp>, la cual presenta un modelo de elevaciones en formato ráster con una separación de un arcosegundo, lo cual implica un tamaño de celda o de pixel de aproximadamente treinta metros por treinta metros, ver figura 4.7.

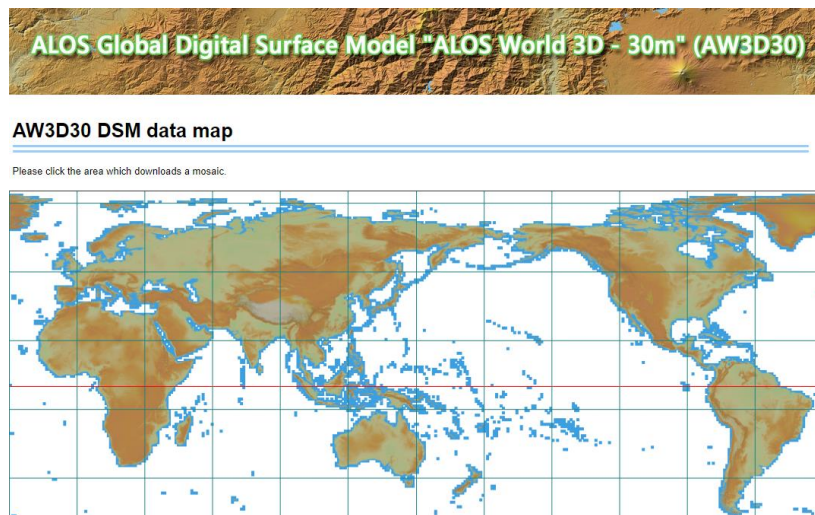


Figura 4.7. Modelo digital de elevaciones origen satelital ALOS World 3D. Fuente: JAXA (2021).

Los modelos digitales de elevación de origen satelital descargados se encontraban en la proyección de coordenadas geográficas WGS84, por lo que se debió pasar a la proyección oficial de Costa Rica CRTM05.

4.3. Transformación de coordenadas

La transformación de coordenadas de la proyección de coordenadas geográficas WGS84 a coordenadas CRTM05, se realizó mediante la herramienta *Project Ráster* del ArcToolbox.

Al ingresar la información satelital, el SIG reconoció las coordenadas de los modelos digitales de elevación como GCS_WGS_1984, posterior a eso se validó que los parámetros de las coordenadas CRTM05 y el datum CR-SIRGAS fuesen los correctos para Costa Rica, ver figura 4.8.

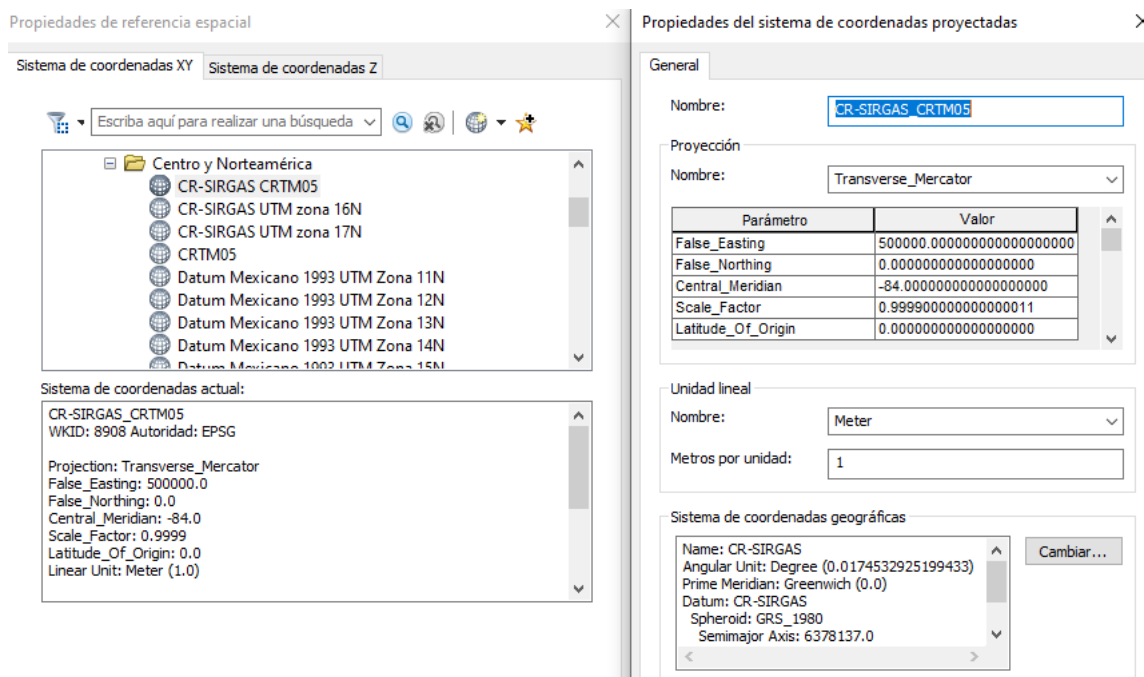


Figura 4.8. Parámetros de proyección cartográfica CRTM05.

Posterior a esa validación, se realizó la transformación de coordenadas y finalmente se llevaron los modelos digitales de elevación de origen satelital a la proyección cartográfica CRTM05.

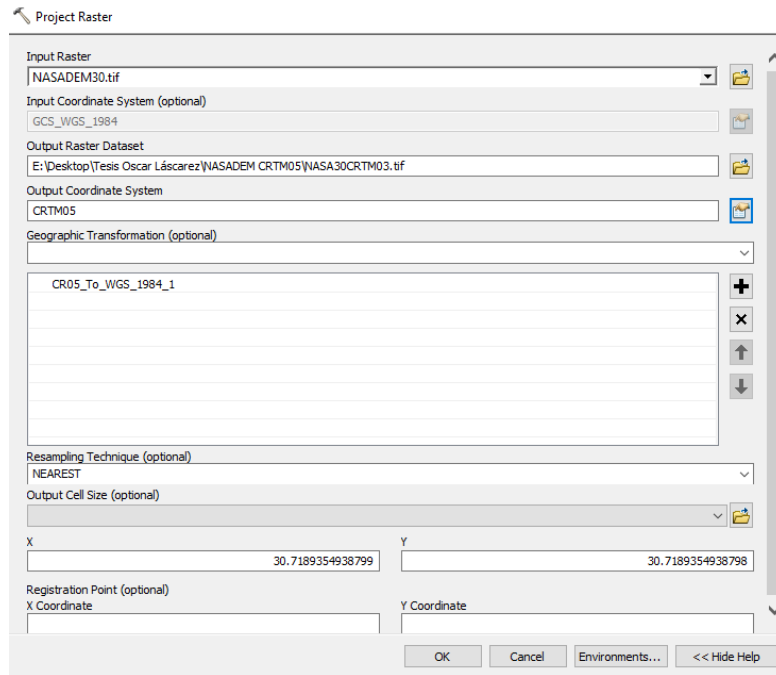


Figura 4.9. Transformación de coordenadas geográficas a CRTM05.

4.4. Descarga de modelos geoidales

Para la obtención de los modelos geoidales se utilizó la página <http://icgem.gfz-potsdam.de> del International Centre for Global Earth Models (ICGEM), la cual pertenece al Centro Alemán de Investigaciones en Geociencias GFZ.

El primer paso realizado fue elegir el modelo geoidal de interés, como se muestra en la figura 4.10, se seleccionó el EGM96s, el cual es el que está asociado a los modelos digitales de elevación de origen satelital NASA y ALOS World 3D.

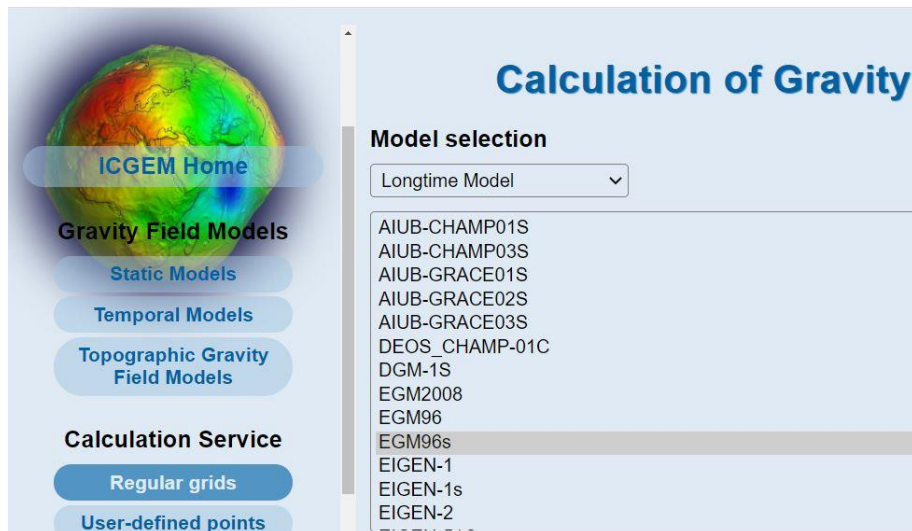


Figura 4.10. Selección de modelo geoidal EGM96s. Fuente: ICGEM (2021).

Además, se definió que las grillas de valores fuesen correspondientes a la anomalía de altura, la cual es una aproximación del geoid. El cálculo que se realiza en la página de la ICGEM.

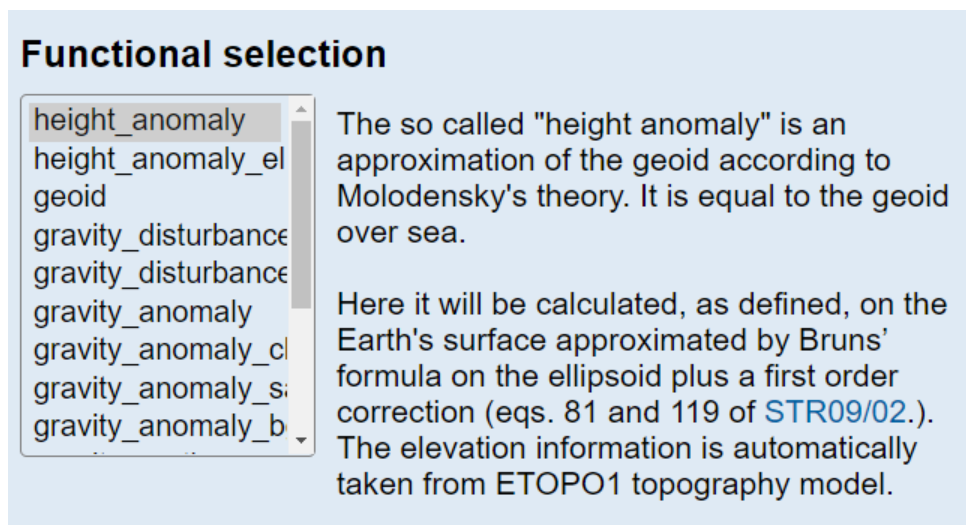


Figura 4.11. Selección de anomalía de altura para el modelo geoidal EGM96s. Fuente: ICGEM (2021).

Posterior a esa selección del modelo geoidal, se definió el área de interés, en la cual se debió ingresar las coordenadas de Costa Rica, el formato de las coordenadas geográficas fue: -86.5° a -82° y 11.5° a 7.5° .

Además, se definió la separación de la grilla en una resolución de 0.015° por 0.015° , esto para ser congruente con la resolución de los modelos descritos en la sección 3.3.1, 3.3.2 y 3.3.3 de este documento.

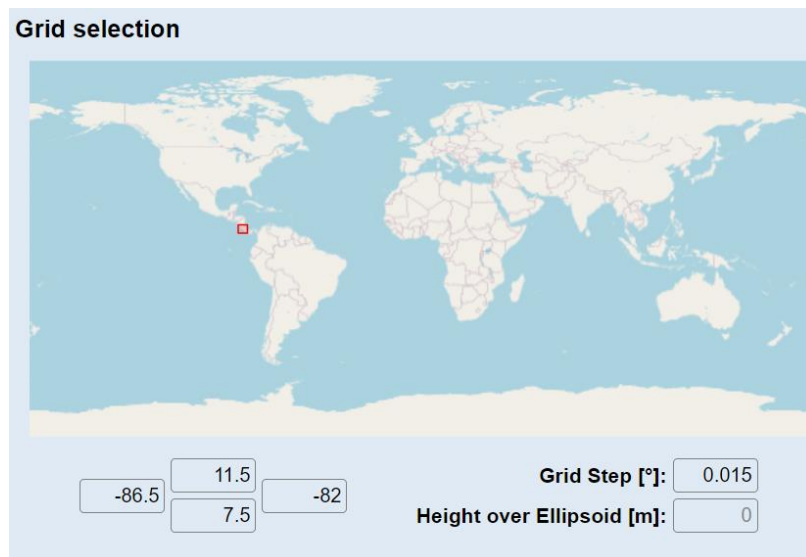


Figura 4.12. Definición de la zona de interés a descargar para el modelo geoidal EGM96s. Fuente: ICGEM (2021).

También se observa en la figura 4.13 la cantidad de puntos obtenidos para este modelo geoidal EGM96s, en total fueron 1385.

Functional:	height_anomaly_ell
Model:	EGM96s
Calculation Start:	2022-02-14T00:25:37.387Z
Calculation End:	
Calculation Time:	
Grid:	Longitude: -86.5° .. -82° Latitude: 7.5° .. 11.5° Grid step: 0.015°, 80668 Grid points Reference system: WGS84

Figura 4.13. Separación de grilla de 0.015° y un total de 80668 puntos correspondientes al modelo geoidal EGM96s. Fuente: ICGEM (2021).

El mismo proceso y tamaño de grilla se utilizó para la descargar el modelo geoidal EGM08 utilizado en esta investigación.

El modelo geoidal calculado por el Escuela de Ingeniería Topográfica (EIT), de la Universidad de Costa Rica (UCR), es llamado Geoide-Costarricense-Regional calculado por el Método de Stokes-Helmert GCR-RSH-2020.

Los modelos geoidales descargados de la ICGEM tienen las coordenadas de longitud en valores de 273.5°, para la cual se debió realizar un cálculo que permitiera tener los

valores de longitud oeste en el formato -86.5° , para esto se restó a 360° la coordenada de longitud y se le aplicó el signo negativo. Para lo anterior se programó una hoja de Excel.

4.5. Importación de modelos geoidales

Las grillas de anomalías de altura se ingresaron al SIG, se revisó que estuvieran coincidiendo en Costa Rica, para lo cual se aplicó un mapa base y se comprobó que la posición estaba correcta, como se muestra en la figura 4.14.



Figura 4.14. Grilla de anomalías de altura del modelo geoidal EGM96s en Costa Rica.

Posterior a eso se generaron modelos ráster para Costa Rica, utilizando los distintos modelos geoidales utilizados, el modelo geoidal EMG96s se visualiza de la siguiente manera.

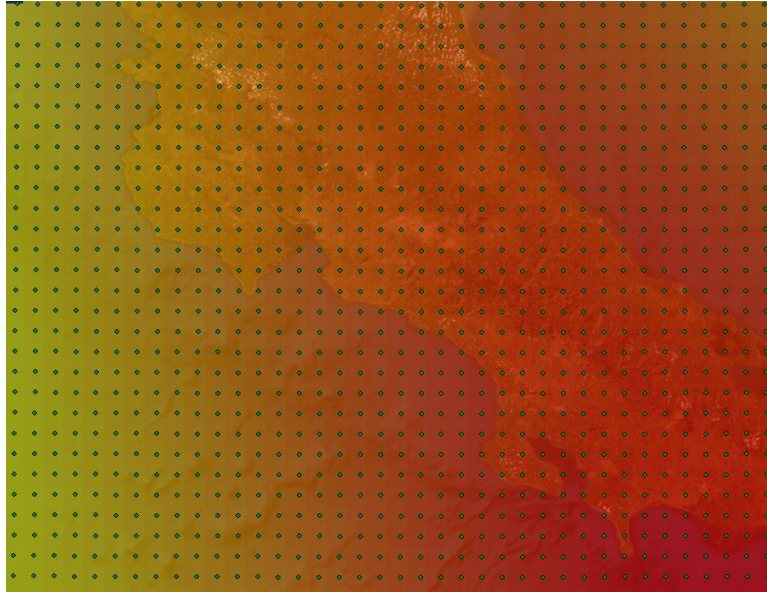


Figura 4.15. Modelo geoidal EGM96s en formato ráster para Costa Rica.

El modelo geoidal EMG08, el cual se considera una versión más detallada, se visualiza de la siguiente manera.

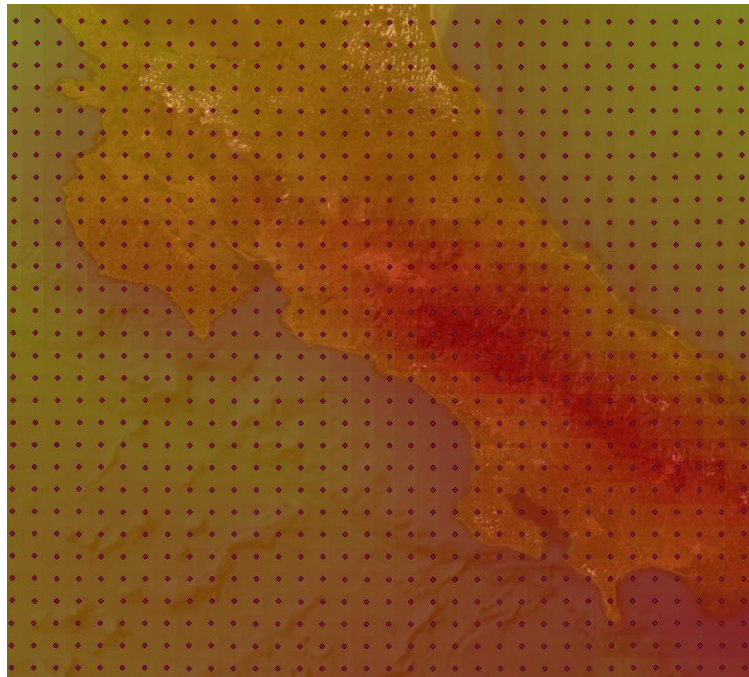


Figura 4.16. Modelo geoidal EGM08 en formato ráster para Costa Rica.

El modelo geoidal de la EIT se descargó en formato ráster, por lo que no se realizaron todos los procesos descritos anteriormente. El sistema de coordenadas en el que se encontraron los datos fue el WGS84, para transformarlo al CRTM05 se utilizó el

ArcToolBox y el proceso descrito en la sección 4.5 Transformación de coordenadas de esta investigación.

4.6. Interpolación de modelos geoidales

Los modelos geoidales utilizados tenían una resolución espacial distinta (tamaño de pixel), esto porque han sido desarrollados en diferentes épocas, cuando se descargaron de la página de la ICGEM se definió una resolución o tamaño de celda de 0.015° .

La definición del tamaño del ráster se basó en la resolución con la que se dispone en los modelos digitales de elevación de origen satelital. Siendo está de aproximadamente 30.70 metros.

Para esto se utilizó la herramienta *Remuestrear* del ArcToolbox, la cual permite redefinir el tamaño o resolución del ráster. Además, como técnica de interpolación se utilizó la bilineal.

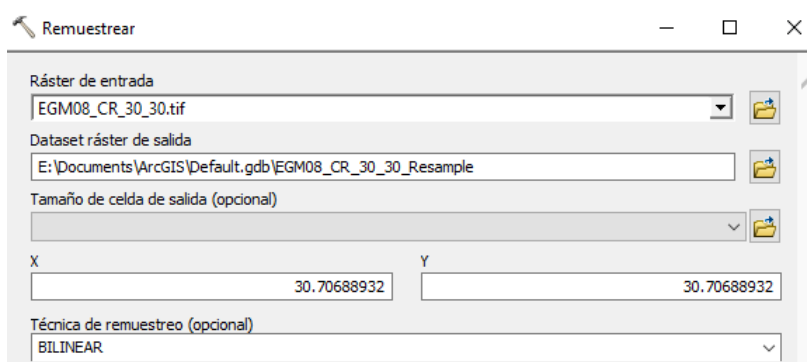


Figura 4.17. Interpolación bilineal del modelo geoidal EGM08 en formato ráster y con un tamaño de pixel de 30.71m.

4.7. Aplicación de los modelos geoidal EGM08 y GCR-RSH-2020

De las distintas fuentes de información utilizadas en esta investigación, se consideró como la más exacta con respecto a la realidad del terreno a la información de los datos LiDAR aéreo, la cual tenía asociado el modelo geoidal EGM08, esto fue lo que motivó a pasar del modelo geoidal EGM96s al EGM08. Además, porque el modelo geoidal EGM08 es más reciente y es utilizado con mucha frecuencia en nuestro país.

El MDE de origen satelital NASADEM y AlosWorld 3D tienen asociado el modelo geoidal EGM96s, por lo que fue necesario asociar el modelo geoidal EGM08 a dicha información satelital. Para realizar esto se aplicaron las siguientes ecuaciones:

$$\zeta = h - H_N \quad (4.1)$$

En donde:

ζ es la anomalía de altura (m)

h es la altura elipsoidal (m)

H_N es la altura normal (m)

Despejando la ecuación anterior se obtiene:

$$h = H \text{ (MDE Alos con EGM96s)} + \zeta \text{ (EGM96s)} \quad (4.2)$$

$$h - \zeta \text{ (EGM08)} = H \text{ (MDE Alos con EGM08)} \quad (4.3)$$

Para realizar estos cálculos se utilizó la herramienta calculadora ráster del ArcToolbox y se aplicó la ecuación 4.2 y posteriormente la ecuación 4.3. En la figura 4.20 se muestra el proceso para aplicar la ecuación 4.1.

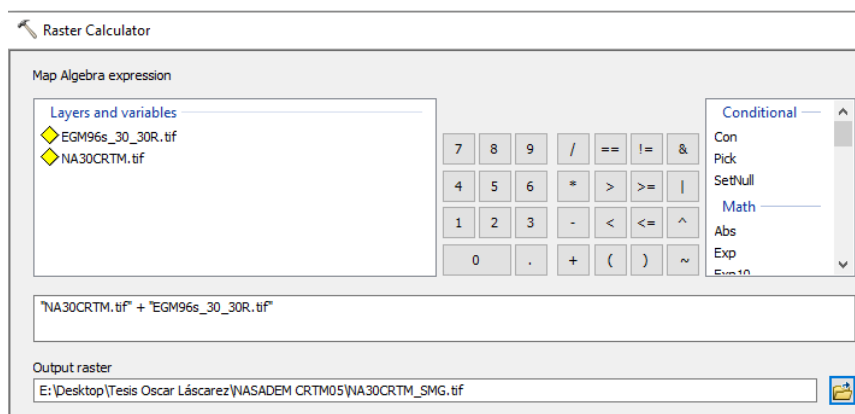


Figura 4.18. Utilización de calculadora ráster de ArcToolbox para pasar del modelo geoidal EGM96s al modelo geoidal EGM08.

Utilizando las 4.1 y 4.2 también se logró aplicar a los modelos digitales de elevación de origen satelital, el modelo geoidal *Geoide-Costarricense-Regional calculado por el Método de Stokes-Helmert* (GCR-RSH-2020).

Este modelo geoidal GCR-RSH-2020 se le aplicó el modelo de elevación de origen LiDAR aéreo.

4.8. Cálculo de las diferencias de los Modelos Digitales de Elevación de origen satelital y LiDAR aéreo

Una vez que se llevaron todas las fuentes de información al modelo geoidal EGM08 y al modelo geoidal GCR-RSH-2020, además a la misma proyección cartográfica

CRTM05. Se utilizó la herramienta de la calculadora ráster, para obtener las diferencias entre la información LiDAR y los MDE de origen satelital. La operación matemática que se aplicó fue el MDE de origen satelital menos el MDE de origen LiDAR aéreo.

El resultado de dicho cálculo generó un nuevo modelo ráster, el cual contiene las diferencias entre los MDE de origen satelital y la información LiDAR. Al tener el resultado en dicho formato, se puede aplicar estadística y con esto proponer una corrección a los modelos digitales de elevación de origen satelital.

Además, fue posible conocer la cantidad de valores que formaron la población estadística, para el análisis de las diferencias entre el MDE Alos World 3D y el MDE LiDAR aéreo, la población fue de 12349 registros. Mientras que para el análisis del NASA DEM 2018 y el MDE LiDAR aéreo, la población fue de 11988 registros.

4.9. Análisis de las distribuciones estadísticas

La distribución estadística normal o gaussiana, propone una población que se comporte de manera simétrica, en donde el promedio, la moda y la mediana coinciden. Gráficamente una distribución normal tiene un aspecto como se muestra en la figura 4.19.

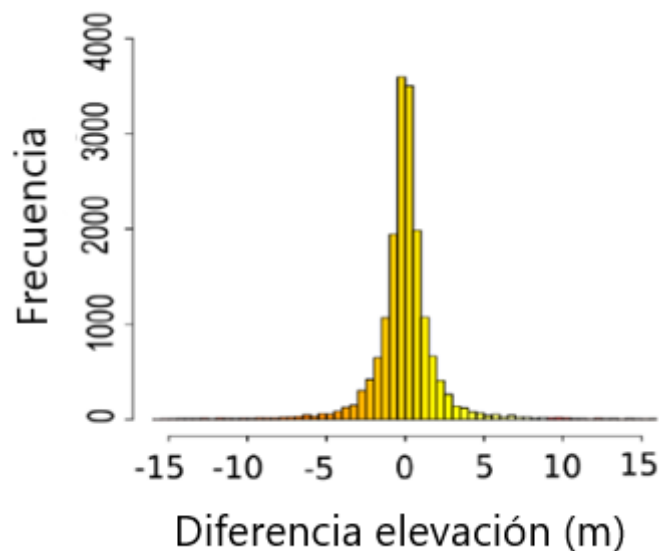


Figura 4.19. Distribución normal. Fuente: Garbanzo - León (2020).

Luego de haber realizado los cálculos y obtener las gráficas de las distribuciones estadísticas de las diferencias entre los MDE satelital Alos World 3D y los MDE LiDAR aéreo, utilizando el modelo geoidal EGM08, se desprende que no hay simetría en los

datos, tampoco se aproxima a la distribución normal, por lo que no sería lo más recomendable utilizar el promedio como factor de corrección. El resultado del cálculo del promedio fue de 3.650m. La distribución de las diferencias de elevación entre el MDE Alos World 3D y el MDE LiDAR se muestra en la figura 4.20.

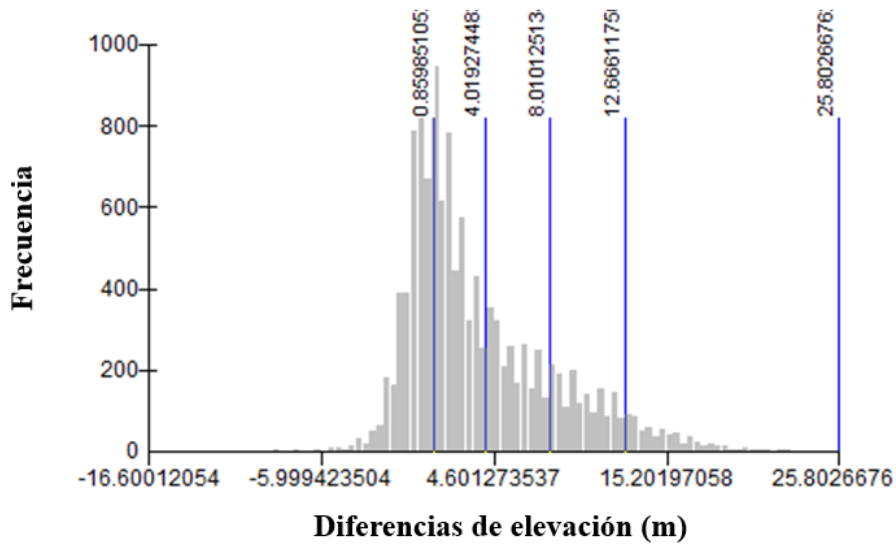


Figura 4.20. Comportamiento de la distribución estadística entre Alos World 3D y LiDAR para el modelo geoidal EGM08, cálculo del promedio.

El comportamiento de los datos entre Alos World 3D y LiDAR utilizando el modelo geoidal EGM08, tiende a parecerse más a una distribución exponencial desfasada hacia la derecha con respecto al origen, generando una distribución asimétrica. Posterior a este análisis se tomó la decisión de calcular cuantiles.

Al utilizar cuantiles, se logró tener menos influencia de los valores extremos. Con la utilización de dos cuantiles, se logró generar la mediana. Esto implica considerar el 50% de la masa de los datos y otro 50% de la masa. El cálculo para el cuantil del primer 50% obtenido fue de 2.190m. En la figura 4.21 se muestra el valor de los dos cuantiles calculados.

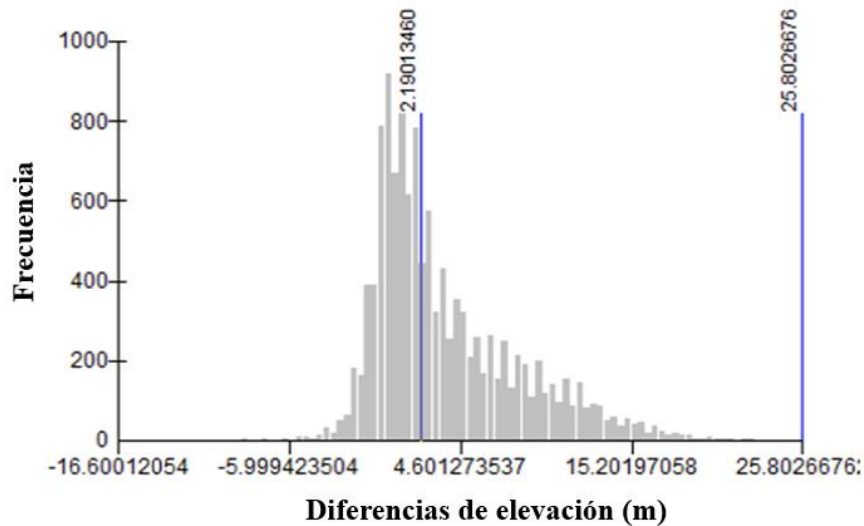


Figura 4.21. Comportamiento de la distribución estadística entre Alos World 3D y LiDAR para el modelo geoidal EGM08. Cálculo de la mediana.

Además, se calculó la moda, la cual representa el valor que se repite con más frecuencia o también es conocido como el valor más probable. El resultado de ese cálculo fue de 1.022m, teniendo una repetición de 7.66%, dentro de los 12349 registros analizados.

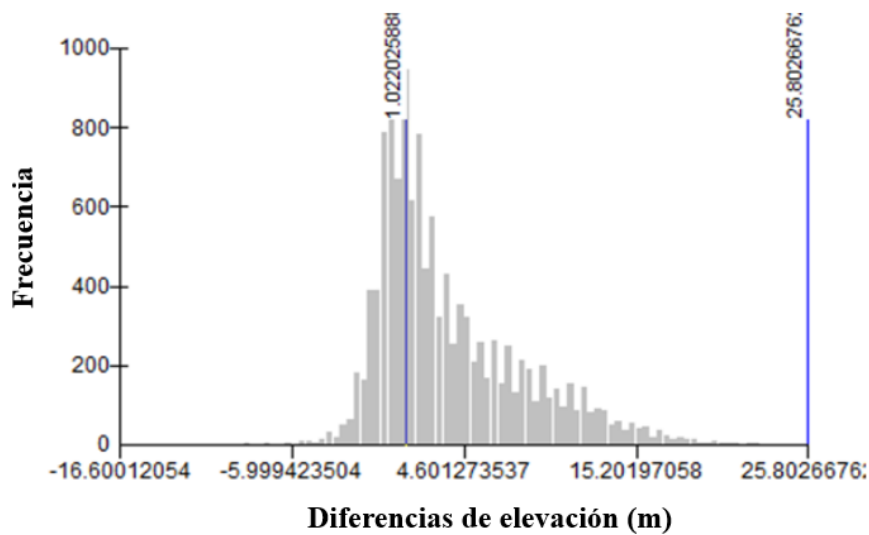


Figura 4.22. Cálculo de la moda donde se puede observar el comportamiento de la distribución estadística entre Alos World 3D y LiDAR para el modelo geoidal EGM08.

En la tabla 4.2 se resumen los valores calculados del promedio, la mediana y la moda, para las diferencias entre los MDE Alos y MDE LiDAR, utilizando el modelo geoidal EGM08.

Tabla 4.1. Factores estadísticos propuestos para mejorar el MDE ALOS World 3D, utilizando el modelo geoidal EGM08.

Factores de corrección propuestos para MDE ALOS World 3D	
Promedio	3.650m
Mediana	2.190m
Moda	1.022m

Además, se analizó también el comportamiento de las diferencias de elevación entre el MDE NASA DEM 2018 y el MDE de origen LiDAR aéreo utilizando el modelo geoidal EGM08, tiende a parecerse más a una distribución normal, pero no es exactamente gaussiana, ya que los valores extremos o colas estadísticas se comportan de manera distinta, donde se nota que la cola derecha tiene una pendiente más regular que la cola de la izquierda. El promedio que se calculó para esta distribución fue de 2.481m.

Al no ser exactamente normal, se calculó el promedio, la mediana y la moda. La distribución estadística de las diferencias de elevación entre los datos del NASA DEM 2018 y MDE LiDAR aéreo, se muestra en la figura 4.23.

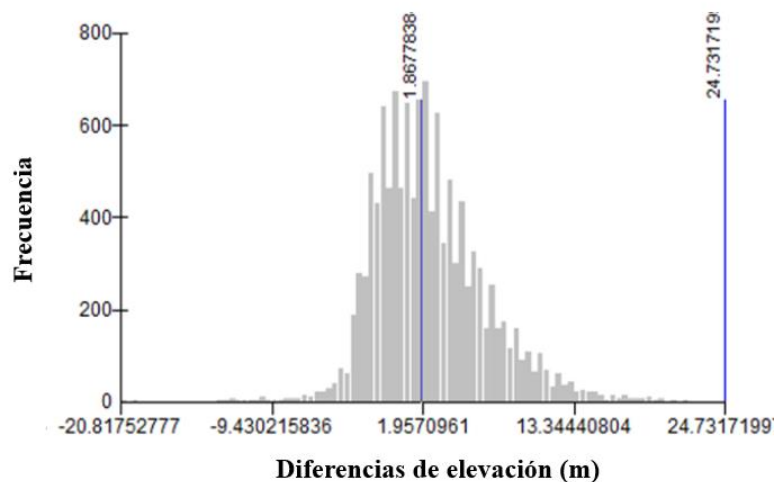


Figura 4.23. Comportamiento de la distribución estadística entre NASA DEM 2018 y LiDAR, utilizando el modelo geoidal EGM08.

Esta distribución tiende a verse como una función exponencial, con un desfase hacia la derecha con respecto al origen, la cual genera una distribución asimetría. Por esta razón se calculan dos cuantiles, garantizando que se considere el 50% de los datos o de la masa estadística. El cálculo del primer cuantil fue de 1.866 metros, la moda fue de 2.182 metros y tiene una repetición de 6.20% dentro de los 11988 registros analizados.

En la tabla 4.3 se resumen los valores calculados del promedio, la mediana y la moda, para las diferencias entre los NASA DEM 2018 y MDE LiDAR, utilizando el modelo geoidal EGM08.

Tabla 4.2. Factores estadísticos propuestos para mejorar el MDE NASA DEM 2018, utilizando el modelo geoidal EGM08.

Factores de corrección propuestos para MDE NASA	
Promedio	2.481m
Mediana	1.868m
Moda	2.182m

Por otra parte, se analizó el comportamiento de las diferencias de elevación entre el MDE ALOS World 3D y el MDE del LiDAR aéreo utilizando el modelo geoidal GCR-RSH-2020, tiende a parecerse también a una distribución exponencial desfasada hacia la derecha con respecto al origen, generando una distribución asimétrica. Por lo que también motivó a calcular cuantiles.

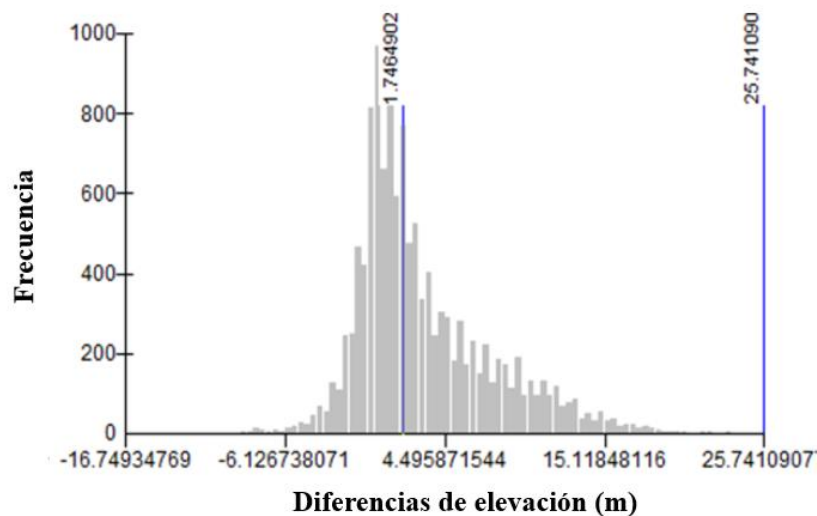


Figura 4.24. Comportamiento de la distribución estadística entre ALOS World 3D y LiDAR, utilizando el modelo geoidal GCR-RSH-2020.

Al utilizar cuantiles, se logró nuevamente tener menos influencia de los valores extremos. Con la utilización de dos cuantiles, se logró generar la mediana. El cálculo para el cuantil del primer 50% obtenido fue de 1.746m. En la figura 4.26 se muestra el valor de los dos cuantiles calculados.

Además, se calculó la moda, el resultado de ese cálculo fue de 0.004m, teniendo una repetición de 7.46%, dentro de los 12554 registros analizados. El promedio obtenido fue de 3.023m.

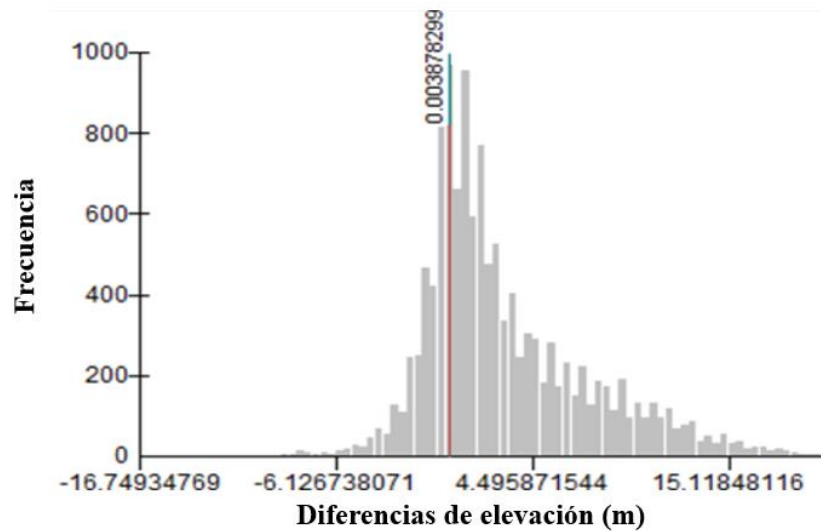


Figura 4.25. Cálculo del primer cuantil y el promedio entre ALOS World 3D y LiDAR, utilizando el modelo geoidal GCR-RSH-2020.

En la tabla 4.4 se resumen los valores calculados del promedio, la mediana y la moda, para las diferencias entre los MDE ALOS World 3D y MDE LiDAR, utilizando el modelo geoidal GCR-RSH-2020.

Tabla 4.3. Factores estadísticos propuestos para mejorar el MDE ALOS World 3D, utilizando el modelo geoidal GCR-RSH-2020.

Factores de corrección propuestos para ALOS World 3D	
Promedio	3.023m
Mediana	1.746m
Moda	0.004m

Con respecto al análisis de las distribuciones estadísticas generadas para las diferencias entre NASA DEM 2018 y LiDAR aéreo, utilizando el modelo geoidal GCR-RSH-2020, se observó un comportamiento normal. Lo cual implica que los valores del promedio, mediana y moda van a tender a ser iguales. En la figura 4.26 se logra observar que existe simetría en los datos.

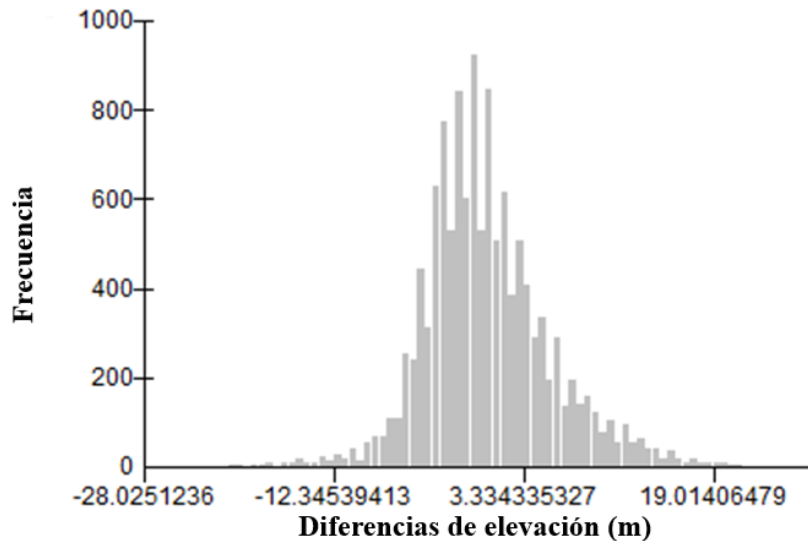


Figura 4.26. Comportamiento estadístico de las diferencias entre NASA DEM 2018 y LiDAR, utilizando el modelo geoidal GCR-RSH-2020.

El valor calculado del promedio fue de 0.335m, el valor de la mediana 0.232m y el valor de la moda 0.775m. En el cálculo de la moda se repitió en 7.52% en los 12508 registro totales. Si bien los valores no son exactamente iguales, es en esta combinación de datos donde se aproxima más a una distribución normal.

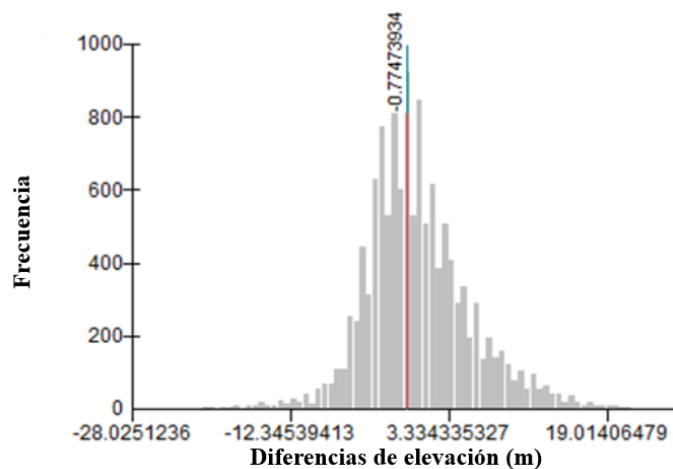


Figura 4.27. Cálculo de la moda y le promedio para NASA DEM 2018 y LiDAR, utilizando el modelo geoidal GCR-RSH-2020.

En la tabla 4.5 se resumen los valores calculados del promedio, la mediana y la moda, para las diferencias entre los MDE NASA DEM 2018 y el MDE LiDAR, utilizando el modelo geoidal GCR-RSH-2020 calculado por la Escuela de Ingeniería Topográfica de la Universidad de Costa Rica.

Tabla 4.4. Factores estadísticos propuestos para mejorar el MDE NASA DEM 2018, utilizando el modelo geoidal GCR-RSH-2020.

Factores de corrección propuestos para NASA DEM 2018	
Promedio	0.335m
Mediana	0.232m
Moda	0.775m

4.10. Análisis de los resultados de los puntos de control GNSS en los MDE mejorados

Los puntos de control medidos en campo con equipo GNSS permitieron validar el mejoramiento de los modelos digitales de elevación, utilizando como base las mediciones realizadas en el campo con equipo GNSS.

En la tabla 4.6 se muestran las diferencias obtenidas entre las mediciones GNSS y el MDE ALOS World 3D con modelo geoidal EGM08, para los 50 puntos de control considerados.

Tabla 4.5. Diferencias de elevación entre el MDE ALOS World 3D y los puntos de control GNSS, utilizando el modelo geoidal EGM08.

Diferencias entre GNSS y ALOS World 3D con EGM08			
Número de punto	H GNSS(m)	H Alos World 3D(m)	Diferencia(m)
1	955.817	957.822	2.005
2	37.103	37.153	0.050
3	958.199	958.022	-0.177
4	69.884	64.416	-5.468
5	370.819	367.111	-3.708
6	755.946	728.387	-27.559
7	168.175	169.309	1.134

Mediciones entre GNSS y ALOS World 3D con EGM08			
Número de punto	H GNSS(m)	H Alos World 3D(m)	Diferencia(m)
8	1.962	2.454	0.492
9	86.165	90.475	4.310
10	5.203	6.226	1.023
11	42.166	41.189	-0.977
12	5.422	6.291	0.869
13	995.326	988.321	-7.005
14	76.176	76.815	0.639
15	1543.55	1542.777	-0.773
16	767.96	769.049	1.089
17	1056.214	1059.869	3.655
18	3468.449	3464.768	-3.681
19	1437.432	1436.642	-0.790
20	111.618	112.815	1.197
21	312.01	310.207	-1.803
22	225.056	227.902	2.846
23	8.64	11.477	2.837
24	3.692	9.944	6.252
25	123.85	126.500	2.650
26	45.471	41.842	-3.629
27	131.526	136.523	4.997
28	1064.928	1066.779	1.851
29	4.269	8.409	4.140
30	33.566	35.367	1.801
31	8.586	19.086	10.500
32	2.166	6.713	4.547
33	66.162	68.450	2.288
34	1221.618	1211.721	-9.897
35	61.713	64.323	2.610
36	55.588	54.905	-0.683
37	719.665	711.874	-7.791
38	431.73	435.763	4.033
39	39.045	21.161	-17.884
40	801.798	796.381	-5.417
41	1112.41	1102.003	-10.407
42	76.565	77.821	1.256
43	160.982	163.505	2.523
44	958.345	956.788	-1.557
45	1174.634	1167.232	-7.402
46	1108.84	1104.370	-4.470
47	45.025	48.214	3.189
48	60.912	61.824	0.912
49	155.606	157.890	2.284
50	24.554	26.953	2.399

El promedio de las diferencias de elevación obtenidas entre el MDE ALOS World 3D y los puntos de control GNSS es de 0.814m y la desviación estándar es de ± 6.207 m.

Aplicando al MDE ALOS World 3D las correcciones calculadas del promedio, mediana y moda que se indicaron en la tabla 4.2, lo cual implica modificar los valores de las elevaciones del modelo, con los valores respectivos de la función estadística considerada.

Posterior a aplicarle al MDE ALOS World 3D las correcciones propuestas que se resumen en la tabla 4.7. Si se considera el valor del promedio que es 3.650m como posible corrección se obtiene en promedio una diferencia de 2.836m, lo cual viene a superar el valor obtenido en la tabla 4.5 el cual era de 0.814m. En este caso se considera que esta corrección no viene a realizar un mejoramiento en el Modelo Digital de Elevaciones.

Utilizando como factor de corrección el valor de la mediana que es 2.190m, se obtiene un promedio de diferencias de 0.770m, el cual sí viene a mejorar el valor obtenido anteriormente de 0.814m y por lo tanto implica un mejoramiento en los datos del Modelo Digital de Elevaciones.

Analizando ahora el posible mejoramiento que se obtiene al utilizar el valor de la moda que es 1.022 se obtiene un promedio de diferencias de 0.794m, el cual también mejora el valor obtenido de 0.814m

Las funciones estadísticas de la mediana y la moda sí aportan valores positivos que permiten realizar un mejoramiento en el MDE ALOS World 3D, mientras que si se utiliza la función del promedio provoca una mayor diferencia entre las elevaciones y una menor desviación estándar, por lo que se considera que esta función no aporta al mejoramiento.

Tabla 4.6. Propuesta de mejoramiento al MDE ALOS World 3D con modelo geoidal EGM08 utilizando el promedio, la mediana y la moda.

Mejoramiento al MDE ALOS World 3D con modelo geoidal EGM08			
Función estadística	Corrección propuesta	Promedio diferencias	Desviación estándar
Promedio	3.650m	2.836m	6.207m
Mediana	2.190m	0.770m	6.235m
Moda	1.022m	0.794m	6.218m

También se realizó la comparación entre los valores de las elevaciones de los puntos de control GNSS y las elevaciones del MDE NASA DEM 2018 con el modelo geoidal EGM08, se obtiene un promedio de diferencias de 3.935m y una desviación estándar de ± 9.503 m. Los cálculos desarrollados se muestran en la tabla 4.8.

Tabla 4.7. Diferencias de elevación entre el MDE NASA DEM 2018 y los puntos de control GNSS, utilizando el modelo geoidal EGM08.

Diferencias entre GNSS y NASA DEM 2018 con EGM08			
Número de punto	H GNSS(m)	H NASA DEM 2018(m)	Diferencia(m)
1	955.817	943.822	-11.995
2	37.103	34.154	-2.949
3	958.199	951.020	-7.179
4	69.884	54.416	-15.468
5	370.819	356.108	-14.711
6	755.946	713.385	-42.561
7	168.175	162.308	-5.867
8	1.962	7.454	5.492
9	86.165	86.475	0.310
10	5.203	19.226	14.023
11	42.166	39.190	-2.976
12	5.422	6.284	0.862
13	995.326	990.322	-5.004
14	76.176	77.815	1.639
15	1543.55	1533.777	-9.773
16	767.96	764.048	-3.912
17	1056.214	1046.869	-9.345
18	3468.449	3468.768	0.319
19	1437.432	1429.641	-7.791
20	111.618	113.815	2.197
21	312.01	312.207	0.197
22	225.056	220.901	-4.155
23	8.64	8.477	-0.163
24	3.692	4.944	1.252
25	123.85	106.501	-17.349
26	45.471	36.842	-8.629
27	131.526	110.523	-21.003
28	1064.928	1058.779	-6.149
29	4.269	8.411	4.142
30	33.566	44.366	10.800
31	8.586	11.086	2.500
32	2.166	9.713	7.547

Diferencias entre GNSS y NASA DEM 2018 con EGM08			
Número de punto	H GNSS	H NASA DEM 2018	Diferencia
33	66.162	60.450	-5.712
34	1221.618	1225.719	4.101
35	61.713	60.323	-1.390
36	55.588	41.904	-13.684
37	719.665	708.870	-10.795
38	431.73	434.763	3.033
39	39.045	24.161	-14.884
40	801.798	801.381	-0.417
41	1112.41	1099.003	-13.407
42	76.565	76.821	0.256
43	160.982	163.505	2.523
44	958.345	968.786	10.441
45	1174.634	1175.231	0.597
46	1108.84	1107.370	-1.470
47	45.025	53.214	8.189
48	60.912	56.824	-4.088
49	155.606	144.890	-10.716
50	24.554	20.934	-3.620

Utilizando los datos calculados en la tabla 4.3, se plantea el mejoramiento del MDE NASA DEM 2018. Aplicando la función estadística del promedio cuyo valor es de 2.481m, se obtiene un promedio de diferencias de 1.454m, lo cual sí viene a mejorar el valor de 3.935m calculado en la tabla 4.8.

Planteando como factor de corrección el valor de la mediana que es 1.868m, se obtiene un promedio de diferencias de 2.067m, el cual sí viene a mejorar el valor obtenido anteriormente de 3.935m.

Al utilizar el valor de la moda que es 2.182m se obtiene un promedio de diferencias de 1.753m, el cual también mejora el valor obtenido de 3.935m

Para realizar un mejoramiento del MDE NASA DEM 2018 se pueden utilizar las funciones estadísticas de la mediana, la moda y el promedio, ya que sí aportan para reducir el promedio de las diferencias de elevaciones con respecto a los puntos de control con equipo GNSS. En la tabla 4.9 se resumen los resultados obtenidos.

Tabla 4.8. Propuesta de mejoramiento al MDE NASA DEM 2018 con modelo geoidal EGM08 utilizando el promedio, la mediana y la moda.

Mejoramiento al MDE NASA DEM 2018 con modelo geoidal EGM08			
Función estadística	Corrección propuesta	Promedio diferencias	Desviación estándar
Promedio	2.481m	1.454m	9.503m
Mediana	1.868m	2.067m	9.503m
Moda	2.182m	1.753m	9.503m

Este análisis también incluyó la combinación del MDE ALOS World 3D con el modelo geoidal GCR-RSH-2020, el cual utilizó los factores de corrección que permiten obtener el mejoramiento en los modelos digitales de elevación, también se comparó con las mediciones realizadas en el campo con técnicas de posicionamiento satelital GNSS.

En la tabla 4.10 se muestran las diferencias obtenidas entre las mediciones GNSS y el MDE ALOS World 3D con modelo geoidal GCR-RSH-2020, para los 50 puntos de control considerados, las cuales se les calculó el promedio y la desviación estándar.

Tabla 4.9. Diferencias de elevación entre el MDE ALOS World 3D y los puntos de control con equipo GNSS, utilizando el modelo geoidal GCR-RSH-2020.

Diferencias entre GNSS y ALOS World 3D con GCR-RSH-2020			
Número de punto	H GNSS(m)	H Alos World 3D(m)	Diferencia(m)
1	955.598	957.694	2.096
2	37.070	37.063	-0.007
3	958.662	958.702	0.040
4	69.963	68.439	-1.524
5	371.178	367.459	-3.719
6	755.970	730.670	-25.300
7	167.964	168.960	0.996
8	1.447	1.242	-0.205
9	86.144	89.409	3.265
10	4.882	5.970	1.088
11	42.255	42.074	-0.181
12	6.019	9.912	3.893
13	995.101	991.471	-3.630
14	75.429	75.974	0.545
15	1543.781	1543.126	-0.655
16	767.515	765.459	-2.056

Diferencias entre GNSS y ALOS World 3D con GCR-RSH-2020			
Número de punto	H GNSS(m)	H Alos World 3D(m)	Diferencia(m)
17	1056.479	1060.129	3.650
18	3468.740	3465.077	-3.663
19	1437.421	1436.392	-1.029
20	111.555	112.728	1.173
21	311.963	308.981	-2.982
22	224.740	220.415	-4.325
23	8.611	11.122	2.511
24	3.982	10.215	6.233
25	123.615	125.078	1.463
26	45.425	39.753	-5.671
27	131.559	134.564	3.005
28	1064.763	1066.638	1.875
29	4.567	8.984	4.417
30	33.629	36.363	2.734
31	8.532	17.935	9.403
32	2.077	6.292	4.215
33	65.865	65.393	-0.472
34	1220.820	1210.286	-10.534
35	61.213	63.240	2.027
36	54.901	53.860	-1.041
37	720.549	713.059	-7.490
38	431.657	435.769	4.112
39	39.003	21.434	-17.569
40	801.635	797.920	-3.715
41	1112.765	1098.191	-14.574
42	77.382	81.400	4.018
43	161.078	165.708	4.630
45	1174.899	1177.630	2.731
46	1109.195	1104.048	-5.147
47	44.813	46.754	1.941
48	60.893	61.738	0.845
49	155.546	157.637	2.091
50	24.319	26.828	2.509

El promedio de las diferencias de elevación obtenidas entre el MDE ALOS World 3D y los puntos de control GNSS es de 0.693m y la desviación estándar es de 6.039m.

Aplicando al MDE ALOS World 3D las correcciones calculadas del promedio, mediana y moda que se indicaron en la tabla 4.4, cuyos valores son promedio 3.023m, mediano 1.746m y la moda 0.004m. Utilizando el valor del promedio como posible factor de corrección se obtiene en promedio una diferencia de 2.330m, lo cual viene a superar

el valor obtenido en la tabla 4.10 el cual era de 0.693m. Para dicho caso se considera que no viene a aportar un mejoramiento al Modelo Digital de Elevaciones.

Utilizando ahora como factor de corrección el valor de la mediana que es 1.746m, se obtiene un promedio de diferencias de 1.053, el cual no aporta para mejorar o reducir el valor obtenido anteriormente de 0.693m. Para este caso tampoco viene a aportar un mejoramiento al Modelo Digital de Elevaciones

Analizando ahora el posible mejoramiento que se obtiene al utilizar el valor de la moda que es 0.004m se obtiene un promedio de diferencias de 0.689m, el cual sí mejora el valor obtenido de 0.693m.

Las funciones estadísticas del promedio y la mediana no aportan al mejoramiento del modelo digital de elevaciones, mientras que la moda sí logra reducir el promedio de las diferencias de elevaciones, lo cual se considera como un mejoramiento al MDE ALOS World 3D, en la tabla 4.11 se resumen los datos obtenidos posterior al mejoramiento planteado.

Tabla 4.10. Propuesta de mejoramiento al MDE ALOS World 3D con modelo geoidal GCR-RSH-2020 utilizando el promedio, la mediana y la moda.

Mejoramiento al MDE ALOS World 3D con modelo geoidal GCR-RSH-2020			
Función estadística	Corrección propuesta	Promedio diferencias	Desviación estándar
Promedio	3.023m	2.330m	6.039m
Mediana	1.746m	1.053m	6.039m
Moda	0.004m	0.689m	6.039m

También se realizó la comparación entre los valores de las elevaciones de los puntos de control con equipo GNSS y las elevaciones del MDE NASA DEM 2018 con el modelo geoidal GCR-RSH-2020, se obtiene un promedio de diferencias de 3.663m y una desviación estándar de ± 9.490 m. Los cálculos se muestran en la tabla 4.12.

Tabla 4.11. Diferencias de elevación entre el MDE NASA DEM 2018 y los puntos de control GNSS, utilizando el modelo geoidal GCR-RSH-2020.

Diferencias entre GNSS y NASA DEM 2018 con GCR-RSH-2020			
Número de punto	H GNSS(m)	H NASA DEM 2018(m)	Diferencia(m)
1	955.598	943.604	-11.994
2	37.070	35.117	-1.953
3	958.662	951.485	-7.177
4	69.963	52.949	-17.014
5	371.178	358.470	-12.708
6	755.970	713.408	-42.562
7	167.964	162.098	-5.866
8	1.447	6.940	5.493
9	86.144	86.454	0.310
10	4.882	9.903	5.021
11	42.255	39.280	-2.975
12	6.019	6.889	0.870
13	995.101	987.095	-8.006
14	75.429	77.070	1.641
15	1543.781	1534.008	-9.773
16	767.515	768.601	1.086
17	1056.479	1047.134	-9.345
18	3468.740	3467.061	-1.679
19	1437.421	1429.630	-7.791
20	111.555	113.752	2.197
22	224.740	226.585	1.845
23	8.611	8.447	-0.164
24	3.982	5.233	1.251
25	123.615	104.264	-19.351
26	45.425	36.796	-8.629
27	131.559	110.555	-21.004
28	1064.763	1058.614	-6.149
29	4.567	8.708	4.141
30	33.629	45.430	11.801
31	8.532	11.032	2.500
32	2.077	9.625	7.548
33	65.865	62.150	-3.715
34	1220.820	1224.923	4.103
35	61.213	59.821	-1.392
36	54.901	46.216	-8.685
37	720.549	707.757	-12.792
38	431.657	434.690	3.033
39	39.003	24.120	-14.883
40	801.635	801.222	-0.413
41	1112.765	1108.359	-4.406
42	77.382	77.637	0.255

Diferencias entre GNSS y NASA DEM 2018 con GCR-RSH-2020			
Número de punto	H GNSS	H NASA DEM 2018	Diferencia
43	161.078	165.601	4.523
45	1174.899	1175.497	0.598
46	1109.195	1101.725	-7.470
47	44.813	59.002	14.189
48	60.893	56.764	-4.129
49	155.546	144.968	-10.578
50	24.319	20.701	-3.618

Utilizando los datos calculados en la tabla 4.5, se planteó el mejoramiento del NASA DEM 2018. Aplicando la función estadística del promedio cuyo valor es de 0.335m, se obtiene un promedio de diferencias de 3.328m, lo cual sí viene a mejorar el valor de 3.663m calculado en la tabla 4.12.

Planteando como factor de corrección el valor de la mediana que es 0.232m, se obtuvo el promedio de diferencias de 3.357m, el cual sí vino a mejorar el valor obtenido anteriormente de 3.663m.

Al utilizar el valor de la moda que es 0.775m se obtiene un promedio de diferencias de 2.888m, el cual también mejora el valor obtenido de 3.663m

Para realizar un mejoramiento del NASA DEM 2018 se pueden utilizar las funciones estadísticas de la mediana, la moda y el promedio, ya que sí aportan para reducir el promedio de las diferencias de elevaciones con respecto a los puntos de control GNSS. En la tabla 4.13 se resumen los resultados obtenidos.

Tabla 4.12. Propuesta de mejoramiento al MDE NASA DEM 2018 con modelo geoidal GCR-RSH-2020 utilizando el promedio, la mediana y la moda.

Mejoramiento al MDE NASA DEM 2018 con modelo geoidal GCR-RSH-2020			
Función estadística	Corrección propuesta	Promedio diferencias	Desviación estándar
Promedio	0.335m	3.328m	9.490m
Mediana	0.232m	3.357m	9.505m
Moda	0.775m	2.888m	9.490m

Los resultados analizados anteriormente generaron distintas diferencias de elevación, en algunos casos mayores y en los otros menores. La elección de cual propuesta de corrección sea la mejor, dependerá de utilización que se le dará a la información. No es

posible generalizar una respuesta, además que siempre se deberá considerar el criterio profesional para decidir cual propuesta de corrección se comporta mejor.

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1. Conclusiones

En esta investigación se analizaron las combinaciones entre los modelos digitales de elevación de origen LiDAR aéreo y los modelos digitales de elevación de origen satelital para Costa Rica. Con las diferencias de elevación calculadas se propusieron los factores de corrección basados en el promedio, la mediana y la moda, aplicables a la información de origen satelital, los cuales buscaban el mejoramiento de dicha información. Estos factores de corrección fueron validados con mediciones GNSS en el terreno.

Se compararon las técnicas de adquisición de datos de los modelos digitales de elevación de origen satelital, los cuales brindan información de manera global, mediante altímetros instalados en satélites y procesos de interpolación que permiten obtener los datos de las elevaciones, esos son utilizados para abarcar grandes extensiones de terreno y por su parte los modelos digitales de elevaciones de origen LiDAR aéreo brindan información de manera regional, utilizan un sensor que trabaja con ayuda de pulsos láser que permite medir de manera directa las elevaciones en el terreno y tienen una mayor densidad de mediciones por metro cuadrado, además la altura de vuelo es menor en comparación con las técnicas satelitales. Lo cual los hace tener mayor exactitud con respecto a la forma del terreno.

Se diseñó un procedimiento de permitió combinar los datos de origen LiDAR aéreo con datos de origen satelital, el cual se basó en la generación de la información en formato ráster, establecimiento de un mismo tamaño de celda o pixel, posterior a eso se unificó la proyección cartográfica CRTM05, se aplicaron los mismos modelos geoidales (EGM08 y GCR-RSH-2020) y haciendo uso de la relación entre alturas elipsoídicas, alturas ortométricas y la ondulación del geoide, se pudo finalmente calcular las diferencias de elevaciones entre cada modelo digital de elevaciones de origen satelital y la información LiDAR aéreo.

El proceso diseñado de la combinación de datos descrito anteriormente permitió calcular las diferencias de elevación, las cuales posterior a realizar el análisis estadístico, se utilizaron como factores de corrección aplicados a los modelos digitales de elevación de origen satelital NASA DEM 2018 y ALOS World 3D, con el fin de poder obtener un mejoramiento en estos modelos. Estos factores fueron calculados a partir de la información LiDAR aéreo, ya que como se mencionó anteriormente, es considerada la información más exacta que describe las elevaciones del terreno.

Para la validación de las distribuciones de los residuos se realizaron 50 mediciones con equipo GNSS en la modalidad de tiempo real, utilizando el protocolo de comunicación VRS, estas mediciones estuvieron distribuidas en todo el territorio costarricense, en zonas altas, bajas, montañosas, costeras y de llanuras. Con el fin de poder validar las correcciones planteadas y realizadas a los modelos digitales de elevación de origen satelital.

El análisis de las diferencias de elevación permitió concluir que la distribución estadística de la combinación entre el MDE de origen LiDAR y el NASA DEM 2018 tiende a comportarse como una distribución normal. Lo cual permitió obtener un mejoramiento del MDE utilizando el promedio, la mediana y la moda.

Con respecto al análisis realizado de las diferencias de elevación entre el MDE de origen LiDAR aéreo y el MDE ALOS World 3D, determinó que la distribución estadística no es normal, más bien se comporta como una distribución exponencial desfasada del origen hacia la derecha. Lo cual implicó que los resultados de la utilización del promedio no permitieran el mejoramiento del MDE ALOS World 3D. Analizando los resultados de la utilización del factor de corrección basado en la mediana y la moda, estos sí permitieron obtener un mejoramiento en dicho modelo de elevaciones.

La unificación de los modelos geoidales previo a realizar el análisis de las diferencias de elevación, garantizó que se utilizara la misma referencia vertical. Cuando se compararon las mediciones con equipo GNSS con las elevaciones de los MDE, se obtuvieron menores diferencias utilizando el Geoide Costarricense Regional calculado por el método de Stokes Helmert de la Escuela de Ingeniería Topográfica de la Universidad de Costa Rica, que el modelo geoidal EGM08. Esto gracias a que el EGM08 es un modelo global mientras que el GCR-RSH-2020 es un modelo específico para Costa Rica. Por lo tanto, se esperaba y se comprobó que el geoide GCR-RSH-2020 representa mejor el territorio costarricense.

5.2. Recomendaciones

El proceso de combinación de datos de alta frecuencia LiDAR aéreo y los modelos digitales de elevación de origen satelital debe evaluarse en otras zonas del país, distintas a la zona de Guanacaste.

Proponer un análisis de las diferencias entre la información de origen LiDAR aéreo y los modelos digitales de elevación de origen satelital, que contemple variables como el tipo de cobertura vegetal y pendiente de la zona analizada.

Incentivar a que se investigue sobre las diferencias de elevación de los MDE de origen satelital y los modelos de elevaciones generados por el Catastro Nacional entre el año 2014 y 2017 mediante técnicas fotogramétricas, con el fin de proponer un mejoramiento de los MDE de origen satelital.

Analizar los distintos métodos de interpolación disponibles para generar los formatos ráster y poder determinar cuál es el que brinda un mejor comportamiento para el relieve costarricense.

BIBLIOGRAFÍA

- Berné, J.L, Anquela, A.B., Garrido, N. (2014). *GNSS GPS: fundamentos y aplicaciones en Geomática*. Universitat Politecnica de Valencia.
- De Meers, M. N. (2002). *GIS and Modeling in Raster*. John Wiley & Sons.
- Dong, P. Chen, Q. (2018). *LiDAR remote sensing and applications*. CRC Press.
- Doyle, F. (1978). *Digital Terrain models: an overview*. *Photogrametric Engineering and Remote Sensing*. 44(12): 1481-1485.
- Evans, J.S, Hudak, A.T., Faux, R., Smith, A.M.A. (2009). *Discrete return lidar in natural resources: Recommendations for project planning, data processing, and deliverables*. *Remote sensing*, 1: 776-794.
- Fagua, J., Campo, A., Posada, E. (2011). *Desarrollo de dos metodologías para la generación de modelos digitales de terreno (MDT) y superficie (MDS) empleando datos LiDAR y programas de licencia*. *Análisis Geográfico*, 49, 83-95.
- Felicísimo, A. (2009). *Modelos digitales del terreno introducción y aplicaciones en las ciencias ambientales*. Recuperado de <http://www.etsimo.uniovi.es/~feli>
- Garbanzo-León, J., Fernández, A. V., Sánchez, M. V., Salvatierra, J. P., Kingdon, R. W., & Lucke, O. H. (2020). *A regional Stokes-Helmert geoid determination for Costa Rica (GCR-RSH-2020): computation and evaluation*. *Contributions to Geophysics and Geodesy*, 50(2), 223-247.
- García, J., Gonvalves, L., Riquelme, J. (2009). *Decision trees in LiDAR to classify Land Uses and Covers*. Sevilla, España: Universidad de Seville.
- Gotway, C. Ferguson, R. Hergert, G. Peterson, T. (1996). *Comparasion of Kriging an Inverse Distance Methods for mapping soil parameters*. *Soil Science Society of American Journal* 60:1237-1247.
- Heiskanen, W. y Moritz, H. (1985). *Geodesia Física*. Instituto Geográfico Nacional de España, Instituto de Astronomía y Geodesia. Madrid, España.
- Hofman-Wellenhof B, Lichtenegger H, Wasle E (2008). *GNSS global navigation satellite system: GPS, GLONASS; Galileo and more*. Springer, Wien.

- Hoyer, M., Wildermann, E., Suárez, H., & Hernández, J. (2004). *Modelo geoidal combinado para Venezuela (MGCV04)*. *Interciencia*, 29(12), 667-672.
- Hoyer, M. (2012). *Conceptos básicos del posicionamiento GNSS en tiempo real. Ntrip y tópicos relacionados con el tema*. Escuela SIRGAS en Posicionamiento GNSS en Tiempo Real (SIRGAS-RT).
- Huising, E. Pereira, L.G. (1998). *Errors and accuracy estimates of laser data acquired by various laser scanning systems for topographic applications*. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*. 53: 1245-1261.
- Japan Aerospace Exploration Agency. (2019) DAICHI, Land Observing Satellite. Tokio, Japón. Recuperado de <https://global.jaxa.jp/projects/sat/alos/>
- Joly, F. (1988). *La cartografía*. Oikos-Tau. Barcelona.
- Jonhston, K. Ver Hoef, J. Krivoruchko, K. Lucas, N. (2001). *Using ArcGIS Geostatistical Analyst*. ESRI. 300 p.
- Kravchenko, A. Bullock, D. (1999). *A comparative study if interpolation methods for mapping soil properties*. *Agronomy Journal* 91:393-400.
- Kuhn, M. (2002). *Geoidbestimmung unter Verwendung verschiedener Dichtehypothesen*. DGK, Reihe C, Hef Nr. 520, Munchen.
- Lemoine, F. G., Kenyon, S. C., Factor, J. K., Trimmer, R.G., Pavlis, N. K., Chinn, D. S., Cox, C. M., Klosko, S. M., Luthcke, S. B., Torrence, M. H., Wang, Y. M., Williamson, R. P. Maglione, C. Parente and A. Vallario (1998). *Geopotential Model EGM96*.
- Maglione, P., Parente, C., & Vallario, A. (2018). *Accuracy of global geoid height models in local area: tests on campania region (Italy)*. *International Journal of Civil Engineering and Technology*, 9(3), 1049-1057.
- Mena, J B. (2008). *Geodesia Superior – Volumen 2*. Centro Nacional de Información Geográfica (España).
- Meyer, T. (2010). *Introduction to Geometrical and Physical Geodesy, Foundations of Geomatics*. ESRI.

- National Aeronautics and Space Administration. (2019) NASADEM, Earthdata. Columbia, Estados Unidos. Recuperado de <https://earthdata.nasa.gov/esds/competitive-programs/measures/nasadem>
- Pavlis N., Holmes S., Kenyon S., Factor J. (2012). *The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008)*. Journal of Geophysical Research: Solid Earth (1978-2012) Volume 117.
- Sevilla, M. J., & Rodríguez Velasco, G. (2003). *Análisis del modelo de geopotencial de muy alto grado GPM98 en las Islas Canarias*.
- Silva, E. F. (1991). Geografía de Costa Rica. Euned.
- Shan, J., & Toth, C. K. (2018). *Topographic laser ranging and scanning: principles and processing*. CRC press.
- Tomlinson, R. (2007). *Pensando en SIG*. New York. ESRI.
- Vargas, G. (2013). Glosario Geografía de Costa Rica.
- Wagner, W. Ullrich, A., Ducic, V., Melzar, T., Sudnicka, A., (2006). *Gaussian decomposition and calibration of a novel small-footprint full-waveform digitizing airborne laser scanner*. ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing. 60: 100-112.
- Wolf, P. & Ghilani, C. (2009). *Topografía* (2016). México: Alfaomega.

ANEXOS

Anexos en CD adjunto

Anexo 1. Modelo digital de elevaciones NASA DEM 2018 con modelo geoidal EGM08.

Anexo 2. Modelo digital de elevaciones ALOS World 3D con Modelo Geoidal EGM08.

Anexo 3. Modelo digital de elevaciones NASA DEM 2018 con modelo geoidal GCR-RSH-2020.

Anexo 4. Modelo digital de elevaciones ALOS World 3D con Modelo Geoidal GCR-RSH-2020.

Anexo 5. Modelo digital de elevaciones LiDAR aéreo.