

Universidad de Costa Rica
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Eléctrica

Flujo de potencia en sistemas HVDC
mediante el método de Inclusión
Holomórfica

Por:

Jose Francisco Vargas Chaves

Ciudad Universitaria “Rodrigo Facio”, Costa Rica

Febrero del 2020

Flujo de potencia en sistemas HVDC mediante el método de Inclusión Holomórfica

Por:

Jose Francisco Vargas Chaves

Sometido a la Escuela de Ingeniería Eléctrica
de la Facultad de Ingeniería
de la Universidad de Costa Rica
como requisito parcial para optar por el grado de:
LICENCIADO EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

Aprobado por el Tribunal:

Ing. Diego Dumani Jarquín, Ph.D.
Representante del Director, Escuela de Ingeniería Eléctrica

Ing. Eddie Araya Padilla, Ph.D.
Director, Comité Asesor

Ing. Gustavo Gómez Ramírez, Msc. Ing. Jorge Blanco Roldán, Ph.D.
Miembro, Comité Asesor Miembro, Comité Asesor

Ing. Gustavo Valverde Mora, Ph.D.
Miembro, Comité Asesor

Dedicatoria

A mi familia.

Reconocimientos

Al profesor Eddie Araya Padilla, por haberme ayudado en este proyecto como director de tesis.

A los profesores Gustavo Gómez Ramírez y Jorge Blanco Roldán, por ser parte del comité asesor.

Índice general

Índice de figuras	vii
Índice de cuadros	vii
Nomenclatura	viii
1 Introducción	1
1.1 Antecedentes	1
1.2 Justificación	7
1.3 Hipótesis	8
1.4 Planteamiento del Problema	8
1.5 Objetivos	10
1.6 Alcance	10
1.7 Metodología del trabajo	11
2 Marco teórico	12
2.1 Sistemas de Transmisión de Potencia en HVDC	12
2.2 Métodos de flujo de potencia en sistemas HVDC	17
2.3 El método de Inclusión Holomórfica	23
2.4 Aproximación de Padé	27
3 Procedimiento de solución al flujo de potencia en HVDC	30
3.1 Diagrama de flujo	30
3.2 Cálculo de la tensión en el inversor	33
3.3 Cálculo de la tensión en el rectificador	44

3.4	Validación del método propuesto con el sistema de prueba	46
3.5	Compración con otros métodos	51
4	Conclusiones y recomendaciones	57
	Bibliografía	59
A	Anexos	66
A.1	Cálculo del producto de las series $V(s)$ y $W(s)$	66
A.2	Programa en Matlab para resolver el flujo de potencia en sistemas HVDC	68
A.3	Programa en Matlab para el método de Newton-Raphson	70
A.4	Programa en Matlab para el método de Gauss-Seidel	72

Índice de figuras

2.1	Esquema de un sistema de transmisión de Corriente Continua.	13
2.2	Esquema de un rectificador.	13
2.3	Tensiones de fase y tensión de rectificador.	14
3.1	Diagrama de flujo del método de Inclusión Holomórfica.	32
3.2	Circuito equivalente de un sistema HVDC.	33
3.3	Esquema del sistema de prueba.	47
3.4	Error absoluto de V_r al usar el método de Newton-Raphson.	54
3.5	Error absoluto de V_r al usar el método de Gauss-Seidel.	54
3.6	Cálculo de V_r con el método de Inclusión Holomórfica.	55
3.7	Comparación de los métodos usados con el valor exacto.	56

Índice de cuadros

3.1	Parámetros del sistema.	40
3.2	Aproximaciones de Padé para V_i	42
3.3	Parámetros del sistema de prueba.	46
3.4	Aproximaciones de Padé.	48
3.5	Resultados del flujo de potencia con el método de Inclusión Holomórfica	50
3.6	Resultados del flujo de potencia. Modo de operación (I_d, γ, a_r, a_i)	50
3.7	Calculo de V_r mediante el método de Newton-Raphson, con $V_{r0} = 1,0$	51
3.8	Calculo de V_r mediante el método de Gauss-Seidel, con $V_{r0} = 1,0$	52
3.9	Calculo de V_r mediante el método de Newton-Raphson, con $V_{r0} = 1,2$	52
3.10	Calculo de V_r mediante el método de Gauss-Seidel, con $V_{r0} = 1,2$	52
3.11	Tiempos de ejecución de los programas en Matlab.	56

Nomenclatura

HVDC	Alta tensión en corriente continua
CA	Corriente alterna
CC	Corriente continua
PQ	Barras de carga
PV	Barras de tensión controlada
Y_{ik}	Matriz de admitancias
Y_{is}	Matriz de admitancias en derivación
\bar{V}_i^{CA}	Vector de tensiones CA
V_i^{CA}	Magnitud de la tensión CA de barra
δ_i	Ángulo de la tensión CA de barra
\bar{S}_i	Potencia compleja
G_{ik}	Matriz de conductancias
G_{ish}	Matriz de conductancias en derivación
α	Ángulo de retardo
γ	Ángulo de conmutación
β	Ángulo de avance
v_{an}	Tensión alterna de fase a neutro
v_{ab}	Tensión alterna línea-línea
V_r	Tensión del rectificador
V_{cd}	Tensión promedio
V_{dr}	Tensión CC sin carga del rectificador
V_{di}	Tensión CC sin carga del inversor
V_i	Tensión del inversor

X_c	Reactancia de conmutación
R_{cr}	Resistencia de conmutación del rectificador
R_{ci}	Resistencia de conmutación del inversor
P_{CC}	Potencia CC
P_r	Potencia del rectificador
a_r	Relación de transformación del rectificador
a_i	Relación de transformación del inversor
P_i	Potencia del inversor
R_L	Resistencia de la línea
I_d	Corriente CC de la línea
P_{CA}	Potencia activa en CC
Q_r	Potencia reactiva en el rectificador
φ_r	Ángulo del factor de potencia en el rectificador
Q_i	Potencia reactiva en el inversor
φ_i	Ángulo del factor de potencia en el inversor
I_{pr}	Corriente en la barra del rectificador
I_{pi}	Corriente en la barra del inversor
I_{fr}	Corriente en derivación de la barra del rectificador
I_{fi}	Corriente en derivación de la barra del inversor
$V_i(s)$	Función de tensión en el parámetro s
c_i	Coefficientes de la serie de potencias de la tensión
w_i	Coefficientes de la serie de potencias inversa de la tensión
$f_{[M/N]}$	Aproximación de Padé
a_i, b_i	Coefficientes de la aproximación de Padé
σ	Transformación del método de Inclusión Holmórfica
V_{r0}	Valor inicial de tensión en el rectificador

Resumen

Los sistemas HVDC se han popularizado en las últimas décadas debido a las ventajas que presentan, en comparación con los sistemas en corriente alterna, siendo una de las principales, es la transmisión en grandes distancias con menos pérdidas. Para tales estudios de flujo de potencia en HVDC, los métodos usados son iterativos y la mayoría se basan en el método de Newton-Raphson.

En el presente trabajo se propone el método no iterativo de Inclusión Homórfica para realizar el flujo de potencia en sistemas HVDC. Primero se desarrolló el modelo del sistema HVDC de dos estaciones convertidoras, luego se presenta el procedimiento para el flujo de potencia con el método de Inclusión Homórfica, desarrollando las ecuaciones necesarias.

El método utiliza la expansión en series de potencia de la tensión, al modelar la tensión como una función de la variable compleja s , y métodos de continuación analítica para obtener el valor numérico de la tensión, mediante la aproximación de Padé.

El análisis se realiza calculando las tensiones en las estaciones convertidoras y se valida con un sistema de prueba. Los resultados se compararon con los obtenidos mediante los métodos iterativos de Gauss-Seidel y de Newton-Raphson. Para tal efecto, se programaron subrutinas en Matlab, que permiten calcular los coeficientes de la serie de potencias y la aproximación de padé.

Los resultados muestran que además de ser aplicable, el método de Inclusión Homórfica requiere menos cálculos, para comprobar la tolerancia especificada, que los requeridos con los métodos numéricos mencionados. Esto se debe a que el método de Inclusión Homórfica, por ser recursivo, no requiere repetir los cálculos al aumentar uno o más coeficientes en la serie, solo se debe calcular el nuevo coeficiente a partir de los ya obtenidos y así sucesivamente.

En el caso tratado aquí, una aproximación de Padé de orden dos es suficiente para alcanzar seis decimales de exactitud.

Un resultado importante, es que el estudio de flujo de potencia con el método de Inclusión Homórfica, se puede hacer, tomando en cuenta los diferentes modos de operación de sistema HVDC.

Como posibles aplicaciones del método para trabajos futuros se tienen; sistemas HVDC con múltiples estaciones convertidoras, sistemas débilmente condicionados y estabilidad de tensión.

1 Introducción

1.1 Antecedentes

El problema de flujo de potencia en los sistemas HVDC

Como es bien conocido, el problema del flujo de potencia ha sido estudiado ampliamente en los sistemas de transmisión de corriente alterna, a través de métodos numéricos [1, 2, 3]. En años recientes se ha llegado a desarrollar un nuevo método no iterativo que presenta ventajas con respecto a los métodos iterativos [4].

En el caso de los sistemas de transmisión en corriente continua (HVDC: High Voltage Direct Current, por sus siglas en inglés), el problema se ha estudiado con menos popularidad, pese a la gran importancia y ventajas que presentan estos sistemas. Esto se debe a que los métodos no iterativos, aún se encuentran en etapas tempranas de su desarrollo [5].

Los métodos para resolver el problema del flujo de potencia en HVDC, en su mayoría son los mismos que para el caso de los sistemas en corriente alterna. El método de Newton-Raphson y sus variantes, así como el de Gauss-Sidel, que se han usado tradicionalmente en el caso de los sistemas de corriente alterna, también funcionan con las mismas ventajas y desventajas para el caso de corriente continua. Una de las desventajas más significativas, es que la convergencia se encuentra condicionada a la elección del valor inicial [4].

En la última década se han empleado tres métodos para estudiar el flujo de potencia en sistemas, con enlaces CA-CC (AC-DC: Alternating Current Direct Current, por sus siglas en inglés); el método Simultáneo, el de Eliminación de Variables y el Secuencial. Sin embargo, estos métodos también son iterativos y se basan fundamentalmente, en el método de Newton-Raphson [6].

Recientemente se han realizados avances el en estudio del flujo de potencia en sistemas con enlaces CA-CC modificando los métodos iterativos. En este aspecto, se puede mencionar métodos propuestos por [7, 8], que se describen brevemente a continuación y con más detalle en el capítulo 2.

El método iterativo modificado, llamado *Método de Gauss-Seidel Secuencial modificado*, presentado en [7]. Este método se basa en la teoría de inyección de corrientes nodales en todas las barras del sistema. El sistema CC es tratado por la corriente inyectada a las barras donde está conectado y el efecto de la parte CC es reflejado en barras internas, por la potencia adicional inyectada.

El Método Híbrido [8] donde los efectos de la parte CC del sistema se consideran como una carga dependiente de tensión, con esto, su efecto se toma en cuenta en la matriz CA Jacobiana del método de Newton-Raphson. Esto se hace representando la potencia activa y reactiva de la parte CC del sistema como función de la tensión CA línea a línea.

El método de Inclusión Holomórfica

En el año 2012 se publicó en [4], un nuevo método para resolver las ecuaciones en estado estacionario del flujo de potencia en corriente alterna. El autor previamente, ya había registrado dos patentes para aplicaciones industriales, en 2009 [9] y 2011 [10].

El método de Inclusión Holomórfica se basa en técnicas del análisis complejo, en [4], el autor analiza el caso del sistema de dos barras, por lo que, la solución incluye solamente el modelo de barras de carga PQ. Las barras de tensión controlada no fueron modeladas.

El Método de Inclusión Holomórfica (EHM: Holomorphic Embedding Method por su siglas en inglés), ha sido utilizado desde su publicación, para resolver el problema del flujo de potencia en sistemas de transmisión de corriente alterna, así como en sistemas de distribución [11, 12]. También se ha aplicado el método de Inclusión Holomórfica en modelos de dispositivos de electrónica de potencia [5].

Subramanian, Feng y Tylavsky [13], modelaron las barras de tensión controlada PV, mediante el Método de Inclusión Holomórfica, para resolver las Ecuaciones de Flujo de Potencia.

Feng y Tylavsky [14], calcularon el punto de equilibrio inestable para un sistema de potencia de dos barras. El enfoque fue probar que si dicho punto existe, entonces se garantiza que esa solución es única, si dicha solución no existe también se garantiza el conocimiento de esta condición.

Subramanian [15], en sus tesis de maestría, describe el método de Inclusión Holomórfica en forma detallada. Desarrolló el método tomando en cuenta los tipos de barras en el sistema CA, oscilante, PQ y dos modelos para las barras tipo PV. Además implementó software mediante MATLAB, para resolver el Problema de Flujo de Potencia en sistemas de 118 barras.

Trias [16] presenta los fundamentos y la motivación del método de Inclusión Holomórfica. Muestra cómo al aplicar una transformación por un escalar a las ecuaciones del flujo de potencia, estas resultan invariantes, es decir, que las ecuaciones resultantes presentan la misma forma, pero escaladas por un factor. También explica el uso de técnicas analíticas, como las series de potencia, y como a través del teorema de Stahl, sobre la maximidad de la continuación analítica, se puede obtener la solución al flujo de potencia por medio de la aproximación de Padé. En esta publicación, se describe cómo extender el método al caso de las barras PV, que no se consideraron en [4].

En [17], se muestra lo indispensable de la aproximación de Padé, como técnica de continuación analítica de funciones complejas, expresadas como series de potencia. Se propone un método para incluir, en el problema de flujo de potencia, las magnitudes de tensión con restricciones en el plano complejo, para el modelo de las barras PV. También demostraron que el método de Inclusión Holomórfica es mejor, que el de Newton-Raphson, aún incluyendo el modelo de las barras PV.

En [18], se presenta varios modelos para resolver redes generales que incluyen barras PV. Afirman, que los modelos propuestos no sufren de los problemas numéricos

que presentan modelos anteriores, [13]. Los modelos fueron probados en sistemas que incluían de 9 hasta 300 barras.

Con una modificación del método, en [19], se aplicó al problema de flujo de potencia. El método fue desarrollado incluyendo dos variables complejas, α y β , en lugar de solo la variable s y lo llamaron, Bivariate Holomorphic Embedding (BHEM), de modo que, para el caso de un sistema de tres barras, con dos barras PQ, cada tensión de barra PQ tiene su serie potencias. En el sistema de prueba, IEEE-14, los dos parámetros se usaron para dividir el sistema en dos zonas. Cada serie de potencias fue evaluada usando la aproximación de Chisholm.

Una de las desventajas de esta variación del método, es la alta complejidad computacional que limita su aplicabilidad.

En el caso de los sistemas de distribución, Rao y Tylavsky [11] lo aplicaron para reducir un sistema de distribución radial. El enfoque de esta publicación fue proporcionar un modelo equivalente de dos barras. Los autores exploraron la posibilidad de usar la solución analítica obtenida con el método de Inclusión Holomórfica, para determinar redes equivalentes precisas, aún cuando las condiciones de carga cambian. El estudio mostró resultados satisfactorios, en comparación con otros métodos para reducción de redes.

Shukla, Saurabh y Singh [20] aplicaron Optimización por Enjambre de Partículas y el método de Inclusión Holomórfica para resolver el problema llamado *Unit Commitment Problem*. Para tal sistema, se consideró las restricciones de igualdad y desigualdad de las diferentes unidades generadores y el flujo de potencia. La metodología usada consistió de dos etapas: la obtención del punto de operación del sistema por medio del método de Inclusión Holomórfica y la optimización mediante Enjambre de Partículas. La comparación de los resultados, con los obtenidos mediante el método de Newton-Raphson, mostró un ahorro considerable en el tiempo de cálculo en la solución del problema.

En [21], se comparó el método de Inclusión Holomórfica, con otros métodos iterati-

vos usados para el flujo de potencia. En esta publicación, se usó de forma híbrida. Con el método de Inclusión Holomórfica, se calculó los valores iniciales y se refinaron con el método iterativo, para calcular los nuevos valores.

En [22], implementaron y describieron la formulación básica para el método de Inclusión Holomórfica. Esto lo hicieron mediante la generación de una interface para usar los datos de la estructura MATPOWER. Mediante esta, estudiaron siete sistemas de potencia demostrando la viabilidad de esta herramienta.

En [5] se usó el método de Inclusión Holomórfica en sistemas de corriente continua para caso de circuitos no lineales y sistemas de distribución. En esa misma publicación se usó el modelo de un panel fotovoltaico conectado a un convertidor CC-CC tipo buck que energiza una carga de potencia constante, donde también se calculó el punto de operación de un diodo.

Chiang, Wang y Sheng [23] propusieron un nuevo, rápido y flexible método de Inclusión Holomórfica (FFHE por sus siglas en inglés) para resolver el problema de flujo de potencia con límites en la potencia reactiva. Desarrollaron un sistema de ecuaciones para las barras PV y PQ.

Para implementar el método propuesto, diseñaron un nuevo esquema numérico con el cual se calcula la solución numérica sin calcular explícitamente la aproximación racional. La efectividad y viabilidad fue comprobada al usar múltiples casos de prueba, tanto en sistemas de pequeño y de gran tamaño, y encontraron que el método FFHE propuesto requiere menos tiempo de ejecución que el método de Newton, para la mayoría de los casos de prueba. Inclusive, determinaron que el método FFHE es más efectivo que el método de Inclusión Holomórfica.

Rao y Tylavsky [24] aplicaron el método Inclusión Holomórfica a las ecuaciones de método de Newton-Raphson para resolver el problema de Flujo de Potencia. Mostraron el procedimiento para un circuito simple CC y la aplicación a las ecuaciones generales de los sistemas en CA. Esta formulación funciona bien en sistemas que no sean de gran tamaño, ya que, en el sistema probado de 118 barras se requirieron más términos

en la serie de potencias, que en el caso resuelto directamente con el método Inclusión Holomórfica.

En [25] usaron el método de Inclusión Holomórfica para encontrar el punto de equilibrio inestable en sistemas de potencia con varios generadores, resolviendo un problema equivalente del flujo de potencia, considerando la velocidad de los generadores.

En [26] propusieron un modelo de STATCOM por medio del método de Inclusión Holomórfica, este modelo puede operar en varios modos de control para regular los diferentes parámetros del sistema de potencia. Usaron el sistema IEEE 30 para investigar la factibilidad y las características de convergencia del modelo propuesto. Con este concluyeron, para varias condiciones de operación, que su modelo ofrece una única solución y la convergencia no se ve afectada por cambios en las condiciones iniciales del sistema; contrario a lo que podría ocurrir al usar métodos numéricos, como el de Newton-Raphson, esto gracias a que el modelo propuesto ofrece confiabilidad y robustés.

En [27] realizaron el flujo de potencia óptimo aplicado a redes de distribución de baja tensión en condiciones de desbalance. La metodología incluye al método de Inclusión Holomórfica trifásico, junto con un método de optimización no convexo, para obtener el punto de operación óptimo, basado en la función objetivo adecuada.

En [28] propusieron un método híbrido de continuación numérica eficiente para encontrar múltiples soluciones en el flujo de potencia, usando el método de Inclusión Holomórfica, para representar las curvas de solución como funciones holomorfas en el plano complejo.

En [29] se propone un nuevo enfoque de simulación dinámica basado en el método de Inclusión Holomórfica en el dominio del tiempo, lo que permite obtener aproximaciones de alto orden de las dinámicas del sistema, esto mejora la eficiencia en los cálculos computacionales, evitando problemas en la convergencia. El enfoque incluye un modelo flexible de generadores síncronos y controladores.

En [30] se propone un método para obtener la solución analítica aproximada a las

ecuaciones del flujo de potencia, para varias condiciones de operación. El enfoque es basado en el método Inclusión Holomórfica Multidimensional, desarrollados en [31, 32], y el método de Diferencia de Cociente Multivariable. Con el primero se deriva la solución analítica en series de potencia multivariables, para luego obtener la solución en forma de aproximación de Padé multivariable, con el método de Diferencia de Cociente Multivariable.

En [33] propone un control remoto de tensión, que se puede aplicar a barras especificadas del sistema, usando recursos de potencia reactiva; para esto, incluyeron el concepto de control remoto de tensión en las ecuaciones del flujo de potencia y las resolvieron usando método de Inclusión Holomórfica.

Pese a los estudios realizados hasta la fecha, además de lo que se ha hecho para circuitos en corriente continua [5, 24], no se encuentra en la literatura, aplicaciones del método de Inclusión Holomórfica, en estudios de flujo de potencia para sistemas HVDC.

1.2 Justificación

En los estudios de flujo de potencia, los métodos matemáticos que se han empleado son numéricos, aunque son varios los que existen, presentan desventajas comunes. Para Trias [4] los métodos iterativos tienen, en mayor o menor grado, los mismos problemas de convergencia, ya sea, que no se garantiza esta, pues depende de la elección de los valores iniciales; o que el sistema tenga múltiples soluciones y no siempre se puede controlar a cuál de estas converge la solución. En este aspecto, el método de Inclusión Holomórfica presenta ventajas considerables, al ser un método analítico, no se requiere suponer un valor inicial como se hace con los métodos iterativos, además se reduce el tiempo de cálculo.

La ventaja más importante del método de Inclusión Holomórfica, es que, asegura la solución, si la solución no existe, el método permite determinar tal condición.

Otra motivación para realizar este trabajo, es que al ser un método reciente, no se ha aplicado al caso del problema de flujo de potencia en sistemas HVDC. Los estudios realizados con método de Inclusión Holomórfica al caso CC, es para circuitos no lineales con un enfoque a los sistemas de distribución [5] y una aplicación en combinación con el método de Newton-Raphson [24].

1.3 Hipótesis

La solución del problema de flujo de Potencia para sistemas HVDC se puede llevar a cabo mediante el método no iterativo de Inclusión Holomórfica. Se espera que esta propuesta de solución, presente mejores resultados en el tiempo de procesamiento y en la exactitud de las variables evaluadas, en comparación a los métodos iterativos.

1.4 Planteamiento del Problema

Actualmente los estudios de flujo de potencia, se encuentran disponibles para el caso de los sistemas de transmisión en corriente alterna y corriente continua. Además, pese a la gran cantidad de métodos a disposición [2, 4, 16, 34], estos son iterativos. En el caso de los sistemas HVDC, los métodos, con algunas modificaciones, son los mismos al caso de corriente alterna. La similitud en las ecuaciones que modelan el flujo de potencia de ambos sistemas, tienen implícito la hipótesis de que el tratamiento del problema de flujo de potencia en corriente continua, puede hacerse con los mismos métodos, por lo que el método de Inclusión Holomórfica, que es analítico y presenta ventajas considerables sobre los iterativos, podría usarse en la solución del flujo de potencia, en los sistemas de transmisión en corriente continua de alta tensión.

Teniendo en cuenta que en los sistemas de transmisión en corriente alterna, el modelo matemático ampliamente usado se deduce de la ley de suma de corrientes de Kirchhoff (1.1),

$$\sum_{k=1} \bar{Y}_{ik} \bar{V}_k = \frac{\bar{S}_i^*}{\bar{V}_i^*} - \bar{Y}_{ish} \bar{V}_i, \quad (1.1)$$

donde la sumatoria se realiza sobre todas las barras incluyendo la barra de oscilante, y el índice i indica la barra donde se quiere obtener el fasor de tensión.

Para los sistemas de transmisión en corriente continua el modelo es

$$\sum_{k=1}^n G_{ik} V_k = -\frac{P_i}{V_i} - G_{ish} V_i. \quad (1.2)$$

Las ecuaciones (1.1) y (1.2) presentan la misma estructura, la diferencia esencial está en que no se tiene reactancias en el caso de corriente continua, solo la parte resistiva, que se incluye en la matriz de conductancias G_{ik} .

El problema de flujo de potencia en sistemas de transmisión en corriente continua de alta tensión puede plantearse de tal forma, que se pueda aplicar el método de Inclusión Holomórfica para su solución, en este punto se considera que el flujo de potencia se da entre las estaciones convertidoras, esta sería la analogía con los sistemas en corriente alterna, para el flujo entre las barras, así en (1.2), V_k y V_i serían las tensiones del rectificador y del inversor respectivamente.

1.5 Objetivos

Objetivo general

Calcular el flujo de potencia en sistemas HVDC, mediante el Método de Inclusión Holomórfica.

Objetivos específicos

1. Determinar el modelo del sistema HVDC, para el cálculo del flujo de Potencia.
2. Determinar las ecuaciones pertinentes del sistema HVDC, para calcular los coeficientes de la serie de potencias de las tensiones.
3. Determinar un método de aproximación, para establecer la función racional que aproxima la serie de potencias, y de ahí el valor de la tensión nodal.
4. Comparar los resultados obtenidos, con otros métodos de solución.

1.6 Alcance

Este trabajo permitirá determinar una metodología, para resolver el problema de flujo de potencia para Sistemas HVDC, mediante un método no iterativo.

1.7 Metodología del trabajo

La realización de este trabajo, se llevó a cabo, mediante dos etapas principales. La primera fue una etapa preliminar que incluyó la realización de un anteproyecto, la segunda la realización del Trabajo Final de Graduación.

La primera etapa en la que se realizó el anteproyecto siguió las siguientes fases:

Fase 1

1. Revisión de la literatura, sobre los sistemas de potencia en HVDC.
2. Revisión de la literatura, sobre cálculo del flujo de potencia, de estos sistemas eléctricos.

Fase 2

1. Revisión de la literatura, sobre el método de Inclusión Holomórfica.
2. Revisión de la literatura, sobre series de potencias y métodos de aproximación.

La segunda etapa se llevó a cabo mediante las siguientes fases

Fase 1

1. Modelado del sistema de potencia en estudio.
2. Resolución del flujo de potencia, mediante método de Inclusión Holomórfica.
3. Validación de los resultados.

Fase 2

1. Realización del informe final.
2. Preparación de la defensa del TFG.

2 Marco teórico

2.1 Sistemas de Transmisión de Potencia en HVDC

Los sistemas de transmisión en corriente continua, se usan principalmente para realizar el transporte de energía en largas distancias, debido a ciertas ventajas económicas, técnicas y ambientales, con respecto a los sistemas de corriente alterna [35, 36].

Entre los primeros trabajos realizados en el tema, se encuentran los de Marcel Deprez, que en 1881 hizo publicaciones teóricas que llevarían en 1882, a transmitir, en una distancia de 56 kilómetros, 1.5 kW a 2 kV. Sus trabajos llevarían a R. Thury, a diseñar la primera línea de transmisión con enlace CA-CC en 1936. La línea abarcaba 230 km, desde Mountiers a Lyon, y transportaba 20 MW a 125 kV [36].

En la década siguiente, se hicieron avances importantes y se crearon líneas de transmisión en corriente continua, en varias partes del planeta. El enlace de Gotland Suecia, en 1954, fue la primera en operación comercial, diseñada en principio para transportar 20 MW a 100 kV, a lo largo de 98 km [37].

Desde mediados del siglo XX hasta la fecha, se han realizados grandes avances en la transmisión de energía en CC, debido al avance en la electrónica de potencia. La importancia de esta tecnología radica, en que el proceso de transmisión se realiza convirtiendo la energía de corriente alterna a corriente continua, y luego a corriente alterna, mediante dispositivos que forman parte del sistema de transmisión de potencia en corriente continua, los cuales son electrónicos. En la figura 2.1, se muestra el esquema simplificado de un sistema de transmisión de corriente continua, donde los componentes de dicho sistema, son los interruptores, transformadores de corriente, reactores, filtros de armónicos, fuentes de potencia reactiva, convertidores y la línea de transmisión [38].

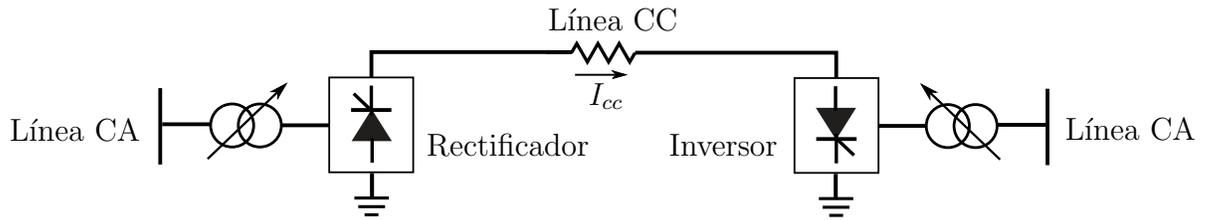


Figura 2.1: Esquema de un sistema de transmisión de Corriente Continua. Adaptado de [38]

Los convertidores son los principales componentes, ya que, es donde se realiza el proceso de conversión. Estos son el rectificador y el inversor, que a continuación se describe brevemente su funcionamiento.

Funcionamiento del rectificador

El rectificador recibe la energía en corriente alterna, y la convierte en corriente directa. El proceso ocurre mediante puentes de rectificación en el interior del rectificador. El esquema de un rectificador se muestra en la figura 2.2.

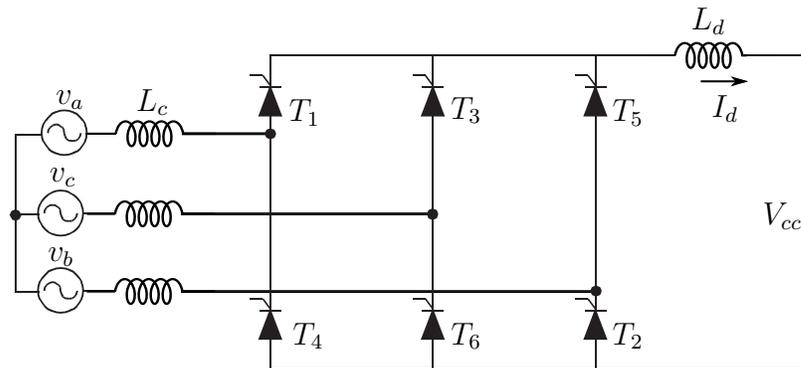


Figura 2.2: Esquema de un rectificador. Adaptado de [39].

Para determinar la tensión en corriente continua V_{cc} , a la salida, se puede observar en la figura 2.3 las gráficas de las tensiones de las tres fases y la tensión de salida del rectificador, la cual depende del valor del ángulo de retardo α , también llamado ángulo de ignición o ángulo de disparo, y que es el tiempo expresado en grados eléctricos,

cuando se le indica a los tiristores que se enciendan para que se genere una tensión en la salida. Esto se logra, al hacer llegar una señal de disparo por la puerta de control, siempre que la diferencia de tensión entre el ánodo y el cátodo sea positiva [6].

En el rectificador, los diodos conducen por parejas, así, mientras dos están encendidos los restantes están apagados. El intervalo de conducción se da donde las diferencias en las ondas de tensión sea mayor. Por ejemplo, si los diodos T_1 y T_2 conducen a la vez, el instante de conmutación se da cuando las ondas se intersecan. Tomando en cuenta el ángulo de retardo α , el intervalo de conducción es $\alpha - \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} + \alpha$.

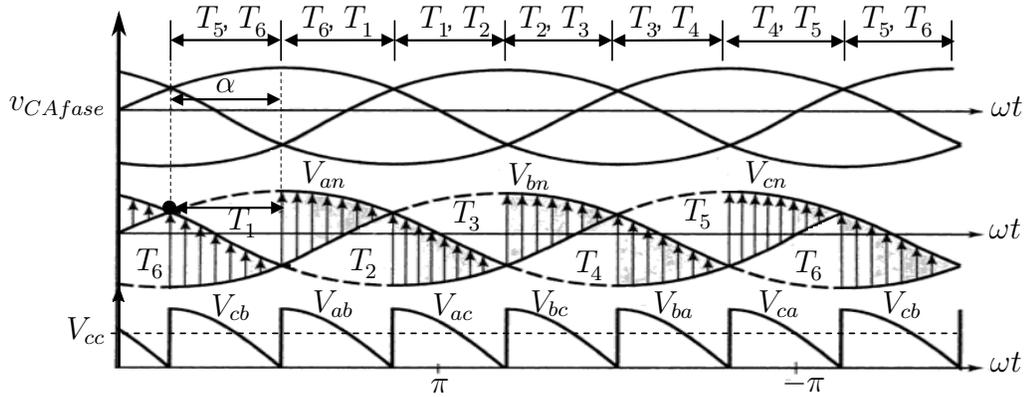


Figura 2.3: Tensiones de fase y tensión del rectificador. Adaptado de [40].

El valor promedio V_{cc} de la tensión, se obtiene por simple integración de la función de la tensión

$$V_{cc} = \frac{1}{2\pi/3} \int_{\alpha - \frac{\pi}{3}}^{\alpha + \frac{\pi}{3}} V \sin(\theta) d\theta = V_{dr} \cos a$$

donde V es el valor pico de la tensión fase-fase, y V_{dr} para el rectificador, es la tensión ideal sin carga y está dado por (2.1), [7, 39, 41, 42].

$$V_{dr} = \frac{3\sqrt{2}}{\pi} a_r v_{acr}. \quad (2.1)$$

Donde a_r es la relación de transformación y v_{acr} es la tensión CA de línea de la barra a la que está conectado el rectificador.

El proceso de conversión no es ideal, puesto que, debido al proceso de aconmutación se tiene una caída de tensión [43] igual a $(3X_{cr}/\pi) I_d$, donde X_{cr} es la reactancia de conmutación [36, 43], la cual es una reactancia ficticia que no consume potencia.

Además el término $3X_{cr}/\pi = R_{cr}$, se conoce como resistencia de conmutación de rectificador [39].

Al tener en cuenta la reactancia de conmutación se tiene que la tensión V_r a la salida del rectificador, está dada por

$$V_r = V_{dr} \cos a - (3X_{cr}/\pi) I_d. \quad (2.2)$$

Funcionamiento del inversor

El inversor se encarga de convertir la energía de corriente continua, transmitida desde el rectificador, a corriente alterna. El funcionamiento del inversor es similar al del rectificador, es decir, un rectificador que opera con $\alpha < 90^\circ$, funciona como inversor [6].

En el caso del inversor, se define un ángulo de extinción γ tal que $\gamma + \beta + \mu = 180^\circ$; siendo β es el ángulo de avance, y γ es el ángulo de conmutación. Así, la tensión del inversor está dada por

$$V_i = V_{di} \cos \gamma - (3X_{ci}/\pi) I_d, \quad (2.3)$$

siendo

$$V_{di} = \frac{3\sqrt{2}}{\pi} a_i v_{aci}. \quad (2.4)$$

El flujo de potencia en sistemas HVDC

La potencia que se transmite en un sistema de transmisión en corriente continua de alta tensión, está dada por la simple relación (2.5)

$$P_{CC} = V I_d, \quad (2.5)$$

donde la corriente se determina, por la diferencia de tensiones entre las estaciones convertidoras,

$$I_d = \frac{V_r - V_i}{R_L}, \quad (2.6)$$

siendo R_L es la resistencia de la línea.

Ahora bien, si la ecuación (2.5) se aplica tal cual para el rectificador, en el caso del inversor, al considerarse las pérdidas $R_L I_d^2$, la potencia en las terminales del rectificador y del inversor, respectivamente, están dadas por:

$$P_r = V_r I \quad (2.7)$$

$$P_i = P_r - R_L I_d^2. \quad (2.8)$$

De esta forma la corriente se puede escribir, en términos de las tensiones de las estaciones convertidoras, sus resistencias y la resistencia de línea [44], para esto, se sustituyen (2.2) y (2.3) en (2.6)

$$\begin{aligned} I_d &= \frac{V_{dr} \cos a - R_{cr} I_d - V_{di} \cos \gamma + R_{ci} I_d}{R_L} \\ R_L I_d &= V_{dr} \cos a - R_{cr} I_d - V_{di} \cos \gamma + R_{ci} I_d \\ R_L I_d + R_{cr} I_d - R_{ci} I_d &= V_{dr} \cos a - V_{di} \cos \gamma \\ (R_L + R_{cr} - R_{ci}) I_d &= V_{dr} \cos a - V_{di} \cos \gamma \end{aligned}$$

despejando I_d en la última ecuación,

$$I_d = \frac{V_{dr} \cos a - V_{di} \cos \gamma}{R_L + R_{cr} - R_{ci}}. \quad (2.9)$$

La ecuación (2.9) puede sustituirse en (2.5) para obtener la potencia transmitida.

El rectificador absorbe potencia reactiva durante el proceso de conversión, si las pérdidas en el transformador del rectificador son despreciadas, la potencia en CC y la potencia en CA son iguales, $P_r = P_{CA}$, de modo que la potencia reactiva absorbida por el rectificador está, dada por (2.10).

$$Q_r = |P_r \tan \varphi_r|, \quad (2.10)$$

donde φ_r es el ángulo de fase entre la tensión CA y la componente fundamental de la corriente CA de la barra en la que se encuentra el rectificador [43].

$$\varphi_r = \frac{V_r}{V_{dr}}. \quad (2.11)$$

En el caso del inversor se tienen las ecuaciones análogas (2.12), (2.13), [7, 39].

$$Q_i = |P_i \tan \varphi_i|. \quad (2.12)$$

$$\varphi_i = \frac{V_i}{V_{di}}. \quad (2.13)$$

2.2 Métodos de flujo de potencia en sistemas HVDC

Los métodos usados en estudios de flujo de potencia, en sistemas HVDC, son en su mayoría, variaciones del método de Newton-Raphson [4, 5, 6, 20]. Con estos métodos, se analizan los sistemas HVDC incluyendo la parte en corriente alterna, por lo que, si el sistema tienen gran cantidad de barras CA y de estaciones convertidoras, el cálculo requiere mayor capacidad de procesamiento, debido a una mayor cantidad de variables que se deben introducir en la matriz Jacobiana, del método de Newton-Raphson. Estas variables son las que enlazan los dos sistemas, el CA y el CC [42, 45].

Otros métodos, como el de Gauss-Seidel, al ser iterativos, también requieren de una buena capacidad de procesamiento, en casos de sistemas de gran tamaño. Además presentan la desventaja, de que la convergencia del método queda condicionada a la elección del valor inicial [4, 5, 34].

En esta sección se describen estos métodos para el cálculo de flujo de potencia para sistemas HVDC.

El método de Newton-Raphson

Es un método iterativo usado en la solución de ecuaciones no lineales, es el de mayor uso debido a que presenta propiedades de convergencia cuadrática, esto quiere decir que la convergencia es más rápida en comparación con otros métodos iterativos [2].

El método se basa en el Teorema de Taylor para linealizar las ecuaciones en cada iteración, que en su forma escalar, el valor de la incognita se determina por (2.14).

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (2.14)$$

Para el análisis de flujo de potencia en sistemas con multiples barras, x es un vector de las variables de estado, así la derivada que se encuentra en denominador, es la derivada de un campo vectorial, por lo tanto, es una matriz y es llamada matriz Jacobiana.

En el caso de aplicación al flujo de potencia en sistemas HVDC, si se considera el modelo de la ecuación (2.6) de dos estaciones convertidoras,

$$\begin{aligned} I_d &= \frac{V_r - V_i}{R_L}, \\ \frac{P_i}{V_i} &= \frac{V_r - V_i}{R_L} \end{aligned}$$

reescribiendo

$$V_i^2 - V_r V_i + R_L P = 0$$

así,

$$\begin{aligned} f(V_i) &= V_i^2 - V_r V_i + R_L P \\ f'(V_i) &= 2V_i - V_r \end{aligned}$$

al sustituir en (2.14),

$$V_i^{k+1} = V_i^k - \frac{(V_i^2)^k - V_r V_i^k + R_L P_i}{2V_i^k - V_r}, \quad (2.15)$$

k corresponde al número de iteración.

La ecuación (2.15) permite determinar la tensión del inversor, y en el caso del rectificador, se puede reescribir la ecuación (2.6) en la forma (2.16),

$$\frac{P_r}{V_r} = -\frac{V_i - V_r}{R_L} \quad (2.16)$$

y de forma análoga, se obtiene la ecuación iterativa para la tensión en el rectificador

$$V_r^{k+1} = V_r^k - \frac{(V_r^2)^k - V_i V_r^k + R_L P_r}{2V_r^k - V_i}. \quad (2.17)$$

Las tensiones en las barras del rectificador e inversor se determinan también, con el método de método de Newton-Raphson, aunque no forma parte de los objetivos del presente trabajo el análisis de flujo de potencia en CA, es importante mencionar que con el método de Newton-Raphson, se determinan los errores en cada iteración para calcular la tolerancia de los valores obtenidos, a través de las ecuaciones (2.18) y (2.19). El proceso continua, hasta alcanzar una exactitud especificada, de las magnitudes de las tensiones en las barras donde se encuentran conectadas las estaciones convertidoras [6].

$$\delta_i^{k+1} = \delta_i^k + \Delta \delta_i^k \quad (2.18)$$

$$|V_i|^{k+1} = |V_i|^k + \Delta |V_i|^k \quad (2.19)$$

El método de Gauss-Seidel

Este es un método iterativo que se basa en la ley de corrientes nodales, en todas las barras y las estaciones convertidoras. Las corrientes de los terminales en CC son integradas en las ecuaciones CA en las barras en las cuales están conectadas las estaciones convertidoras. Se parte de un valor inicial de tensión, para obtener los valores requeridos, si no obtiene la exactitud deseada, los valores calculados se reemplazan para obtener nuevos valores. Así se continua, hasta que la solución converja [2].

En comparación con el método de Newton-Raphson, requiere menos memoria de almacenamiento, pero la convergencia es más lenta [4].

En este método se hacen las siguientes suposiciones [7]:

- El enlace en CC integrado en el flujo de potencia CA, se representa por una inyección de potencia constante en las dos barras terminales del sistema CA.

- Las ondas de tensión en las barras son formas de onda sinusoidales a frecuencia constante.
- Las tensiones y corrientes en CC son filtradas.
- Las pérdidas en los transformadores son ignoradas y los convertidores operan perfectamente balanceados.

Con estas suposiciones, las ecuaciones del método son semejantes a las ecuaciones en los estudios de flujo de potencia de los sistemas CA.

En este caso se inicia con la corriente inyectada en la barra k ,

$$I_k = \frac{P_k - jQ_k}{V_k^*} \quad (2.20)$$

$$I_k = (Y_{k1}V_1 + Y_{k2}V_2 + Y_{kk}V_k + \dots + Y_{kn}V_n) + I_{pr} + I_f \quad (2.21)$$

donde Y_{kn} es la admitancia entre los nodos k y n .

Igualando (2.20) y (2.21),

$$\frac{P_k - jQ_k}{V_k^*} = (Y_{k1}V_1 + Y_{k2}V_2 + Y_{kk}V_k + \dots + Y_{kn}V_n) - I_{pr} - I_f,$$

al despejar V_k ,

$$\begin{aligned} V_k &= \frac{P_k - jQ_k}{V_k^*} - (Y_{k1}V_1 + Y_{k2}V_2 + \dots + Y_{kn}V_n) - I_{pr} - I_f \\ &= \frac{1}{Y_{kk}} \left[\frac{P_k - jQ_k}{V_k^*} - (Y_{k1}V_1 + Y_{k2}V_2 + \dots + Y_{kn}V_n) - I_{pr} - I_f \right]. \end{aligned}$$

Tomando en cuenta que

$$I_k = \sum_{n=1}^N Y_{kn}V_n - I_{pr} - I_f$$

la expresión general para la tensión V_k en la barra del rectificador, se puede determinar por (2.22),

$$V_k = \frac{1}{Y_{kk}} \left[\frac{P_k - jQ_k}{V_k^*} - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^N Y_{kn}V_n - I_{pr} - I_f \right], \quad (2.22)$$

con $I_f = jb_{fr}V_k$.

Para la tensión en la barra del inversor se tiene la expresión (2.23),

$$V_k = \frac{1}{Y_{kk}} \left[\frac{P_k - jQ_k}{V_k^*} - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^N Y_{kn} V_n + I_{pi} - I_f \right], \quad (2.23)$$

con $I_f = jb_{fi}V_k$.

Una vez calculadas las tensiones en las barras de las estaciones convertidoras, se usan las ecuaciones de la sección 2.1, para determinar las demás variables y completar el flujo de potencia.

El método secuencial

Este método fue introducido a finales de la década de los 70's y principios de los 80's, el cual es de implementación fácil y rápida. Las ecuaciones del flujo de potencia en CA y CC, se resuelven en forma separada en cada iteración [8, 46]. Primero se introducen los parámetros y condiciones iniciales, y se resuelven las ecuaciones CC para determinar los ángulos de factor de potencia, esto permite determinar las potencias activas y reactivas de la parte en CC y de las las barras en CA donde están conectadas las estaciones convertidoras, luego el flujo de potencia en CA se resuelve usando el método de Newton-Raphson [46]. El resolver en forma separada las ecuaciones CA y CC, permite que no se modifique la matriz Jacobiana de CA y ambos sistemas pueden tener diferentes algoritmos de flujo de potencia [47]. El sistema CA-CC completo, se resuelve al realizar una iteración en las ecuaciones del sistema CA y después hacer converger el sistema en CC iterativamente hasta que ambas partes, CA y CC, converjan [6].

En este método, es importante tener en cuenta que se hacen algunas suposiciones [46]:

- Se controla la tensión DC con un cierto ángulo de control mínimo.
- Se supone continuidad en la razón de transformación.

- Los márgenes de tensión fijados en los terminales con un control programado de corriente o de potencia.
- Se supone que el sistema CC es multiterminal.

El método unificado

Las ecuaciones no-lineales de flujo de potencia de los sistemas CA y CC son combinadas en un solo conjunto, para ser resueltas a la misma vez, con el método de Gauss-Seidel o el de Newton-Raphson [8, 48].

Para representar el efecto de HVDC y FACTS, estos se consideran como ramas entre dos nodos de la red CA y la línea de transmisión HVDC, se representa como un generador y una carga.

Las suposiciones hechas en este método son [8, 46]:

- La red lineal, bilateral y balanceada.
- Las magnitudes de todas las tensiones son iguales a 1 p.u.
- La resistencia de la línea es despreciable.

Una de las principales ventajas de este método, es que los enlaces CC entre los nodos CA, pueden ser fácilmente modelados, sin embargo, el cálculo puede ser lento.

El método de eliminación de variables

El algoritmo para la solución de las ecuaciones del sistema CA se hace mediante el método de Newton-Raphson. Se eliminan las variables en CC y se derivan expresiones de la potencia activa y reactiva en los nodos CA, donde están las estaciones convertidoras, con esto se debe modificar la matriz Jacobiana de las variables CA [6].

2.3 El método de Inclusión Holomórfica

El método de Inclusión Holomórfica (EHM), se basa en técnicas de análisis de variable compleja, consiste en incluir un pequeño problema dentro de un gran problema con variables complejas, garantizando que el modelo resultante es analítico [4, 14].

A diferencia de los métodos que se han usado tradicionalmente, para resolver el problema del flujo de potencia, este método no es iterativo, y se disminuye el tiempo de cálculo, con respecto a los métodos iterativos.

En esencia, problema del flujo de potencia, se resuelve escribiendo la tensión como una función de la variable compleja s , esto es $V(s)$, y luego como la serie de potencias de esa función [22, 24]. La serie se aproxima como una función racional, usando algún método de continuación analítica [16], de modo que el valor de la tensión, se expresa en forma analítica. Para obtener el valor numérico de dicha variable, se evalúa la función racional en $s = 1$. El proceso se realiza en forma simultánea, para todas las tensiones del sistema, y así determinar los coeficientes de la serie de potencias.

La aplicación del método, se lleva a cabo mediante los siguientes pasos [34].

1. Calcular el valor del primer coeficiente de la serie.
2. Calcular los demás coeficientes de la serie.
3. Determinar la función racional de la serie.
4. Evaluar la función obtenida en el paso anterior en el valor $s = 1$.

Para exponer el método, se desarrolla la deducción de las ecuaciones necesarias y la notación que se usa, es semejante a las utilizadas en [4, 49].

Para determinar las ecuaciones del método, se parte de la relación de la corriente inyectada en cada nodo. En este caso, en sistemas de transmisión de potencia en corriente alterna, esta relación está dada por (2.24)

$$\sum_{k=1}^n \bar{Y}_{ik} \bar{V}_k = \frac{\bar{S}_i^*}{\bar{V}_i^*} - Y_{ish} V_i \quad (2.24)$$

para $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

En el caso de sistemas en corriente continua, que constan de dispositivos lineales y cargas de potencia constante, la relación es análoga [5] y está dada por (2.25),

$$\sum_{k=1}^n G_{ik} V_k = -\frac{P_i}{V_i} - G_{ish} V_i \quad (2.25)$$

para $i = 1, 2, 3, \dots, n$, donde G_{ik} es la matriz de conductancias del sistema y G_{ish} representa las conductancias en derivación y cargas resistivas. Además el signo negativo en el término $\frac{P_i}{V_i}$, indica la conversión pasiva.

El primer paso en la deducción de las ecuaciones del método, es escribir la tensión como una función de variable compleja [4, 23], e incluir el parámetro s en (2.25), obteniéndose

$$\sum_{k=1}^n G_{ik} V_k(s) = -\frac{sP_i}{V_i(s)} - G_{ish} V_i(s), \quad (2.26)$$

$i = 1, 2, 3, \dots, n$.

La ecuación (2.26) es la base para aplicar el método de Inclusión Holomórfica, ya que, dicha expresión ahora está escrita con el parámetro adicional s . Esto es lo que se conoce como *inclusión*, en lo que al método respecta [4].

La forma en que se escoge incluir el parámetro s no es arbitraria, pese a que hay infinitas formas de hacerlo [24], se debe seleccionar de manera tal, que al evaluar $s = 1$ en (2.26), se recobre el problema original (2.25) [16, 49, 50].

Ahora bién, como se mencionó anteriormente, la función de la tensión se escribe como una serie de potencias, de la forma (2.27).

$$V(s) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n s^n. \quad (2.27)$$

Al sustituir (2.27) en (2.26)

$$\sum_{k=1}^n \left(G_{ik} \sum_{n=0}^{\infty} c_{i,n} s^n \right) = -\frac{sP_i}{\sum_{n=0}^{\infty} c_{i,n} s^n} - sG_{ish} \sum_{n=0}^{\infty} c_{i,n} s^n. \quad (2.28)$$

La ecuación (2.28) se puede expandir para obtener los coeficientes c_n por simple comparación de las potencias correspondientes, de cada término s^n , sin embargo, se tiene la

serie $1/\sum_{n=1}^{\infty} c_{i,n}s^n$, inversa de la serie de $V(s)$, al denotar $W_i(s) = 1/\sum_{n=1}^{\infty} c_{i,n}s^n = \sum_{n=1}^{\infty} w_{i,n}s^n$, es claro que $V_i(s)W_i(s) = 1$, entonces

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_{i,n}s^n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} w_{i,n}s^n\right) = 1. \quad (2.29)$$

El lado izquierdo en la ecuación (2.29) es una convolución, que se puede escribir como la ecuación (2.30), donde su desarrollo se muestra en el anexo A.1.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n w_{i,j}c_{i,n-j}\right) s^n = 1 \quad (2.30)$$

Evaluando los coeficientes para $n = 0, 1, 2, \dots$, se triene que:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^0 w_{i,j}c_{i,n-j} &= w_{i,0}c_{i,0} = 1 \Rightarrow w_{i,0} = \frac{1}{c_{i,0}} \\ \sum_{j=0}^1 w_{i,j}c_{i,1-j} &= w_{i,0}c_{i,1} + w_{i,1}c_{i,0} = 0 \Rightarrow w_{i,1} = -\frac{w_{i,0}c_{i,1}}{c_{i,0}} \\ \sum_{j=0}^2 w_{i,j}c_{i,2-j} &= w_{i,0}c_{i,2} + w_{i,1}c_{i,1} + w_{i,2}c_{i,0} \Rightarrow w_{i,2} = -\frac{w_{i,0}c_{i,2} + w_{i,1}c_{i,1}}{c_{i,0}} \\ &\vdots \end{aligned}$$

de donde se obtiene,

$$w_{i,0} = \frac{1}{c_{i,0}} \quad w_{i,n} = -\frac{1}{c_{i,0}} \sum_{j=0}^{n-1} w_{i,j}c_{i,n-j}. \quad (2.31)$$

Con los coeficientes de la serie $W_i(s)$, se puede sustituir en (2.28) y al desarrollar para $n = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left(G_{ik} \sum_{n=0}^{\infty} c_{i,n}s^n\right) &= -sP_i \sum_{n=0}^{\infty} w_{i,n}s^n - sG_{ish} \sum_{n=0}^{\infty} c_{i,n}s^n \\ \sum_{k=1}^n (G_{ik} (c_{i,0} + c_{i,1}s + c_{i,2}s^2 + \dots)) &= -sP_i (w_{i,0} + w_{i,1}s + w_{i,2}s^2 + \dots) \\ &\quad -sG_{ish} (c_{i,0} + c_{i,1}s + c_{i,2}s^2 + \dots) \end{aligned} \quad (2.32)$$

donde por comparación en (2.32), se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n G_{ik}c_{i,0} &= 0 \\
\sum_{k=1}^n G_{ik}c_{i,1} &= -P_i w_{i,0} - G_{ish}c_{i,0} \\
\sum_{k=1}^n G_{ik}c_{i,2} &= -P_i w_{i,1} - G_{ish}c_{i,1} \\
&\vdots \\
\sum_{k=1}^n G_{ik}c_{i,n} &= -P_i w_{i,n-1} - G_{ish}c_{i,n-1}
\end{aligned}$$

por lo que el coeficiente c_n ($n \geq 1$) se puede obtener mediante (2.33),

$$\sum_{k=1}^n G_{ik}c_{i,n} = -P_i w_{i,n-1} - G_{ish}c_{i,n-1}. \quad (2.33)$$

De esta forma, la solución obtenida al resolver

$$\sum_{k=1}^n G_{ik}c_{i,0} = 0 \quad (2.34)$$

es llamada *germ*, y corresponde al caso en que no hay carga conectada al sistema, ni generación.

En resumen, la serie de potencias de la tensión queda establecida, al determinar los coeficientes con las ecuaciones (2.31), (2.33) y (2.34). Por otro lado, como las ecuaciones son recursivas, se debe encontrar el coeficiente c_n para determinar w_n , y luego se puede obtener el coeficiente c_{n+1} y así sucesivamente.

El siguiente paso, en la solución del problema de flujo de potencia en HVDC, consiste en aproximar la serie a una función racional, usando alguna técnica de continuación analítica. En este trabajo se usa el método de Aproximación de Padé, debido a que presenta mayor exactitud para aproximar una serie que otros métodos [4, 34, 50, 51]. El procedimiento para encontrar la forma racional de una función se explica en la sección

2.4 Aproximación de Padé

El método de aproximación de Padé es usado para aproximar una función, mediante una función racional. En el caso de este trabajo, es esencial para obtener el resultado final, ya que, el método de Inclusión Holomórfica es aplicable, debido a que se puede realizar una aproximación de la función desarrollada en serie de potencias, a una función racional.

El procedimiento para obtener la función racional se describe a continuación.

Sea $f(s)$ una función de variable compleja y diferenciable en cada punto de su dominio, al escribir $f(s)$ como una serie de potencias se obtiene la forma (2.35),

$$f(s) = c_0 + c_1s + c_2s^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n s^n. \quad (2.35)$$

Al truncar la serie en el orden k , la serie truncada (2.36) se puede escribir como una función racional [17], de la forma (2.37),

$$f(s) = c_0 + c_1s + c_2s^2 + \dots + c_k s^k = \sum_{n=0}^k c_n s^n. \quad (2.36)$$

$$f_{[M/N]} = \frac{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_M s^M}{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_N s^N}, \quad (2.37)$$

donde $f_{[M/N]}$ se denomina aproximación de Padé, con $k = M + N$.

Se puede escribir (2.37) en forma compacta (2.38), que es útil para trabajar en lenguajes de programación.

$$f_{[M/N]} = \frac{\sum_{i=0}^M a_i s^i}{\sum_{i=0}^N b_i s^i}. \quad (2.38)$$

Los coeficientes a_i y b_i son tales que, $f_{[M/N]}$ y la serie original coincidan hasta el orden k [52, 53], esto se expresa matemáticamente por la ecuación (2.39).

$$\sum_{n=0}^k c_n s^n = f_{[M/N]} + O(s^{M+N+1})_{s \rightarrow 0}. \quad (2.39)$$

El problema de aproximar la serie a la función racional, se reduce a determinar los coeficientes a_i y b_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) [54, 55]. Para esto, se igualan la serie (2.36) y la función racional (2.37) [56], de forma que se tiene

$$c_0 + c_1s + c_2s^2 + \dots + c_n s^n + \dots + c_{M+N} s^{M+N} = \frac{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_M s^M}{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_M s^N}$$

multiplicando por $b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_M s^N$

$$\begin{aligned} & (c_0 + c_1s + c_2s^2 + \dots + c_n s^n + \dots + c_{M+N} s^{M+N}) (b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_M s^N) \\ &= a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_M s^M \end{aligned}$$

al realizar las operaciones en el lado izquierdo e igualar los coeficientes [55], se obtiene el sistema (2.40),

$$\begin{aligned} b_0 c_0 &= a_0 \\ b_0 c_1 + b_1 c_0 &= a_1 \\ b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0 &= a_2 \\ &\vdots \\ b_0 c_M + b_1 c_{M-1} + b_2 c_{M-2} + \dots + b_M c_0 &= a_M \quad (2.40) \\ &\vdots \\ b_0 c_{M+1} + b_1 c_M + b_2 c_{M-1} + \dots + b_{M+1} c_0 + \dots + b_N c_{M-N+1} &= 0 \\ &\vdots \\ b_0 c_{M+L} + b_1 c_{M+N-1} + b_2 c_{M+N-2} + \dots + b_N c_M &= 0, \end{aligned}$$

el cual, es un sistema de $M + N + 1$ ecuaciones, con $M + N + 2$ incógnitas.

Tomando $b_0 = 1$ se tiene un sistema con igual número de ecuaciones e incógnitas,

que al escribirse en forma matricial, queda de la forma (2.41).

$$\begin{pmatrix} c_M & c_{M-1} & c_{M-2} & \cdots & c_{M+N-1} \\ c_{M+1} & c_M & c_{M-1} & \cdots & c_{M+N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{M+N-2} & c_{M+N-3} & c_{M+N-4} & \cdots & c_{M-1} \\ c_{M+N-1} & c_{M+N-2} & c_{M+N-3} & \cdots & c_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{M-1} \\ b_M \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} c_{M+1} \\ c_{M+2} \\ \vdots \\ c_{M+N-1} \\ c_{M+N} \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

Del sistema matricial (2.41), se obtienen los coeficientes b_i , con estos se pueden obtener los coeficientes a_i por simple sustitución en (2.40).

Para el caso $M = N$ se tiene que $a_0 = c_0$, y según [54], los coeficientes a_i y b_i satisfacen las ecuaciones (2.42) y (2.43),

$$\sum_{m=1}^N b_m c_{N-m+k} = -c_{N+k}, \quad k = 1, \dots, N. \quad (2.42)$$

$$\sum_{m=0}^k b_m c_{k-m} = a_k, \quad k = 1, \dots, N. \quad (2.43)$$

3 Procedimiento de solución al flujo de potencia en HVDC

3.1 Diagrama de flujo

En la figura 3.1, se muestra el diagrama de flujo del procedimiento para la de solución al flujo de potencia en HVDC, con el método de Inclusión Holomórfica. Los pasos se describen a continuación.

- El paso 1, consiste en leer los parámetros del sistema, estos son: resistencia de línea y las variables especificadas según el modo de operación, las demás variables son las incógnitas.
- El paso 2, consiste en incluir la variable compleja s en la ecuación del flujo de potencia (2.25), obteniéndose la ecuación (2.26), para luego sustituir la tensión $V(s)$, por su serie de potencias y obtener la ecuación (2.28).
- El el paso 3, se determina la solución “germ”, esto es, el coeficiente c_0 .
- El el paso 4, se usa la fórmula de convolución (2.29), para deducir las fórmulas (2.31), que sirven para calcular los coeficientes de la serie inversa.
- El el paso 5, se usa la ecuación (2.33), para deducir la fórmula recursiva para el cálculo de los coeficientes c_{n+1} de la serie de tensión.
- El el paso 6, se aproxima la serie de tensión a una función racional usando la aproximación de Padé. El procedimiento se describe en la sección 2.4, y se pueden programar las ecuaciones (2.42) y (2.43), para el caso $M = N$.

- El el paso 7 se sustituye $s = 1$ en la función racional del paso 6, para obtener el valor numérico de la tensión en CC, si se ha logrado la tolerancia especificada,
- El el paso 8, si se alcanzó la tolerancia especificada, se continua con el paso 9, en caso contrario, se continua con el paso 10.
- El el paso 9 se da resultado final.
- El el paso 10, si no se alcanzó la tolerancia especificada, se calcula una mayor cantidad de coeficientes en la serie.

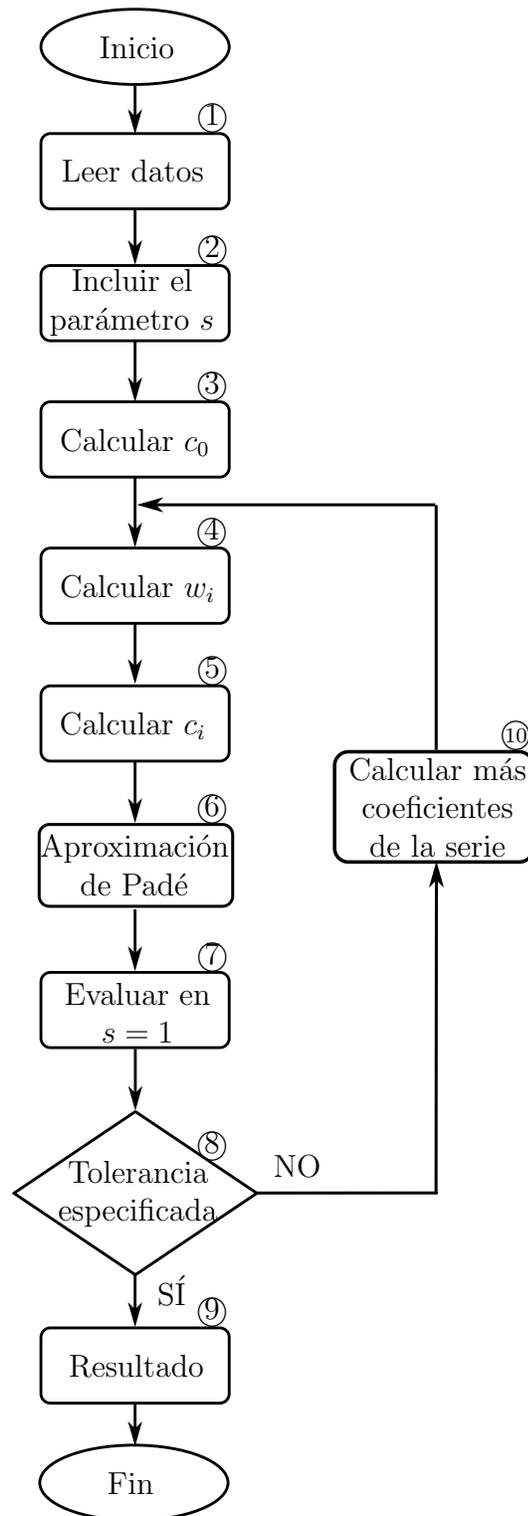


Figura 3.1: Diagrama de flujo del método de Inclusión Holomórfica.

3.2 Cálculo de la tensión en el inversor

Para resolver el problema de flujo de potencia en sistemas HVDC, se parte del modelo para la corriente que fluye entre las estaciones convertidoras I_d . En la figura 3.2 se muestra el circuito equivalente, donde es fácil notar que la corriente está dada, por la diferencia de tensiones del rectificador e inversor, y por las resistencias de conmutación y la resistencia de línea, dicha corriente se modela por la ecuación (3.1),

$$I_d = \frac{V_{dr} \cos \alpha - V_{di} \cos \gamma}{R_L + R_{cr} - R_{ci}}. \quad (3.1)$$

Sin embargo, para el estudio del flujo de potencia realizado en este trabajo, es conveniente escribir la corriente en la forma (3.2). Esta expresión para la corriente, se obtiene al sustituir $V_r = V_{dr} \cos \alpha - R_{cr} I_d$ y $V_i = V_{di} \cos \gamma - R_{ci} I_d$ en (3.1) y despejar I_d , también se puede obtener por simple inspección del circuito de la figura 3.2.

$$I_d = \frac{V_r - V_i}{R_L}. \quad (3.2)$$

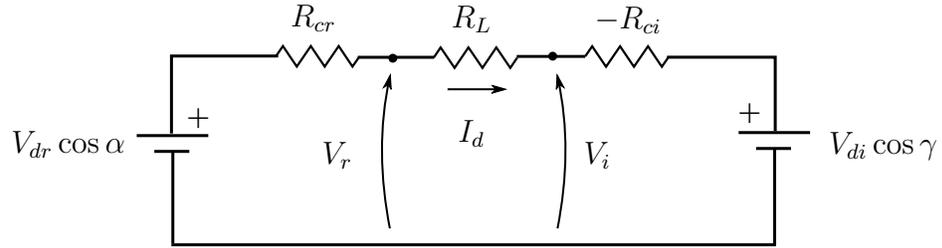


Figura 3.2: Circuito equivalente de un sistema HVDC. Adaptado de [7, 43].

Al escribir $I_d = \frac{P_i}{V_i}$ en (3.2),

$$\frac{P_i}{V_i} = \frac{V_r - V_i}{R_L}.$$

Multiplicando por $\frac{R_L}{V_i}$ se obtiene,

$$\frac{P_i R_L}{V_i^2} = \frac{V_r}{V_i} - 1. \quad (3.3)$$

Usando el par de transformaciones (3.4) en la ecuación (3.3) y al reescribir se llega la ecuación (3.5).

$$U_i = \frac{V_i}{V_r} \quad \sigma = \frac{P_i R_L}{V_r^2} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma V_r^2}{V_i^2} &= U_i^{-1} - 1 \\ \sigma (U_i^2)^{-1} &= U_i^{-1} - 1 \\ 1 &= U_i^{-1} - \sigma U_i^{-2} \\ U_i &= 1 - \sigma U_i^{-1} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Para resolver con el método de Inclusión Holomórfica, se escribe U_i como una función $U_i(s)$ y se introduce el parámetro s en (3.5), para obtener (3.6),

$$U_i(s) = 1 - \sigma s U_i^{-1}(s). \quad (3.6)$$

Ahora se escribe $U_i(s)$ como la serie de potencias (3.7),

$$U_i(s) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n s^n, \quad (3.7)$$

sustituyendo (3.7) en (3.6),

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n s^n = 1 - \sigma s \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n s^n \right)^{-1}. \quad (3.8)$$

Para determinar los coeficientes de la serie se sigue el procedimiento de la sección 2.3. Antes de poder hacer la comparación de los términos en (3.8), se debe obtener una expresión de $W(s)$.

Al denotar $W(s) = (\sum_{n=0}^{\infty} c_n s^n)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} w_n s^n$, es claro que $U_i(s) W(s) = 1$, entonces,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n s^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} w_n s^n \right) = 1. \quad (3.9)$$

La ecuación (3.9) es una convolución, al desarrollar las sumatorias y seguir el procedimiento dado en el anexo A.1, se obtiene las fórmulas para los coeficientes de la serie

inversa.

$$w_0 = \frac{1}{c_0} \quad w_n = -\frac{1}{c_0} \sum_{j=0}^{n-1} w_j c_{n-j}. \quad (3.10)$$

Sustituyendo (3.10) en (3.8),

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} c_n s^n &= 1 - \sigma s \sum_{n=0}^{\infty} w_n s^n \\ c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + c_3 s^3 + \dots &= 1 - \sigma s (w_0 + w_1 s + w_2 s^2 + w_3 s^3 + \dots) \\ c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + c_3 s^3 + \dots &= 1 - \sigma w_0 s - \sigma w_1 s^2 - \sigma w_2 s^3 - \sigma w_3 s^4 + \dots \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes se tiene,

$$\begin{aligned} c_0 &= 1 \\ c_1 &= -\sigma w_0 \\ c_2 &= -\sigma w_1 \\ c_3 &= -\sigma w_2 \\ &\vdots \\ c_{n+1} &= -\sigma w_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

Así se tiene la expresión general (3.11), para los coeficientes de la serie $U_i(s)$.

$$c_{n+1} = -\sigma w_n. \quad (3.11)$$

Los coeficientes de la serie $U_i(s)$ dependen de los coeficientes w_{n-1} para $n \geq 1$, por lo que hay que calcular los coeficientes de la serie inversa. De (3.11) se tiene,

$$\begin{aligned} w_1 &= -\frac{1}{c_0} w_0 c_1 \\ w_2 &= -\frac{1}{c_0} \sum_{j=0}^1 w_j c_{2-j} = -\frac{1}{c_0} (w_0 c_2 + w_1 c_1) \\ w_3 &= -\frac{1}{c_0} \sum_{j=0}^2 w_j c_{3-j} = -\frac{1}{c_0} (w_0 c_3 + w_1 c_2 + w_2 c_1) \end{aligned}$$

$$w_4 = -\frac{1}{c_0} \sum_{j=0}^3 w_j c_{4-j} = -\frac{1}{c_0} (w_0 c_4 + w_1 c_3 + w_2 c_2 + w_3 c_1)$$

$$w_5 = -\frac{1}{c_0} \sum_{j=0}^4 w_j c_{5-j} = -\frac{1}{c_0} (w_0 c_5 + w_1 c_4 + w_2 c_3 + w_3 c_2 + w_4 c_1)$$

$$w_6 = -\frac{1}{c_0} \sum_{j=0}^5 w_j c_{6-j} = -\frac{1}{c_0} (w_0 c_6 + w_1 c_5 + w_2 c_4 + w_3 c_3 + w_4 c_2 + w_5 c_1).$$

En este punto, se hace el cálculo recursivo de los coeficientes c_n .

Se inicia con $n = 0$, usando la ecuación (3.10) para w_0 .

$$c_0 = 1$$

$$w_0 = \frac{1}{c_0} = 1.$$

Para $n = 1$.

$$c_1 = -\sigma w_0 = -\sigma (1) = -\sigma$$

$$w_1 = -\frac{1}{c_0} w_0 c_1 = -\frac{1}{1} (1) (-\sigma) = \sigma$$

Para $n = 2$.

$$c_2 = -\sigma w_1 = -(\sigma)(\sigma) = -\sigma^2$$

$$w_2 = -\frac{1}{c_0} (w_0 c_2 + w_1 c_1) = -\frac{1}{1} ((1)(-\sigma^2) + (\sigma)(-\sigma))$$

$$= 2\sigma^2$$

Para $n = 3$.

$$c_3 = -\sigma (2\sigma^2) = -2\sigma^3$$

$$w_3 = -\frac{1}{c_0} (w_0 c_3 + w_1 c_2 + w_2 c_1)$$

$$= -\frac{1}{1} ((1)(-2\sigma^3) + (\sigma)(-\sigma^2) + (2\sigma^2)(-\sigma))$$

$$= 5\sigma^3$$

Para $n = 4$.

$$\begin{aligned}
 c_4 &= -\sigma (5\sigma^3) = -5\sigma^4 \\
 w_4 &= -\frac{1}{c_0} (w_0c_4 + w_1c_3 + w_2c_2 + w_3c_1) \\
 &= -\frac{1}{1} ((1)(-5\sigma^4) + (\sigma)(-2\sigma^3) + (2\sigma^2)(-\sigma^2) + (-5\sigma^3)(-\sigma)) \\
 &= 4\sigma^4
 \end{aligned}$$

Para $n = 5$.

$$\begin{aligned}
 c_5 &= -\sigma w_4 = -\sigma (4\sigma^4) = -4\sigma^5 \\
 w_5 &= -\frac{1}{c_0} (w_0c_5 + w_1c_4 + w_2c_3 + w_3c_2 + w_4c_1) \\
 &= -\frac{1}{1} ((1)(-4\sigma^5) + (\sigma)(-5\sigma^4) + (2\sigma^2)(-2\sigma^3) + (5\sigma^3)(-\sigma^2) + (14\sigma^4)(-\sigma)) \\
 &= 32\sigma^5
 \end{aligned}$$

Para $n = 6$.

$$\begin{aligned}
 c_6 &= -\sigma w_5 = -\sigma (32\sigma^5) \\
 &= -32\sigma^6
 \end{aligned}$$

La serie $U_i(s)$ tiene la forma

$$\begin{aligned}
 U_i(s) &= c_0 + c_1s + c_2s^2 + c_3s^3 + c_4s^4 + c_5s^5 + c_6s^6 \\
 &= 1 - \sigma s - \sigma^2s^2 - 2\sigma^3s - 5\sigma^4s^4 - 4\sigma^5s^5 - 32\sigma^6s^6.
 \end{aligned}$$

Ahora, se debe aproximar la serie $U_i(s)$ a una función racional $R(s)$ de la forma (3.12), siguiendo el procedimiento descrito en sección 2.4.

$$R(s) = \frac{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_Ls^L}{b_0 + b_1s + b_2s^2 \dots + b_Ms^M}. \quad (3.12)$$

De modo que para la aproximación de orden dos, $L = M = 2$, se tiene que:

$$c_0 + c_1s + c_2s^2 + c_3s^3 + c_4s^4 + c_5s^5 = \frac{a_0 + a_1s + a_2s^2}{b_0 + b_1s + b_2s^2}$$

multiplicando por $b_0 + b_1s + b_2s^2$ y realizando las operaciones en el lado izquierdo,

$$\begin{aligned}
(c_0 + c_1s + c_2s^2 + c_3s^3 + c_4s^4 + c_5s^5) (b_0 + b_1s + b_2s^2) &= a_0 + a_1s + a_2s^2 \\
b_0c_0 + b_0c_1s + b_0c_2s^2 + b_0c_3s^3 + b_0c_4s^4 + b_0c_5s^5 + &= \\
b_1c_0s + b_1c_1s^2 + b_1c_2s^3 + b_1c_3s^4 + b_1c_4s^5 + b_1c_5s^6 + &= \\
b_2c_0s^2 + b_2c_1s^3 + b_2c_2s^4 + b_2c_3s^5 + b_2c_4s^6 + b_2c_5s^7 &=
\end{aligned}$$

agrupando

$$\begin{aligned}
b_0c_0 + (b_0c_1 + b_1c_0) s + (b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0) s^2 + &= a_0 + a_1s + a_2s^2 \\
(b_0c_3 + b_1c_2 + b_2c_1) s^3 + (b_0c_4 + b_1c_3 + b_2c_2) s^4 + &= \\
(b_0c_5 + b_1c_4 + b_2c_3) s^5 + (b_1c_5 + b_2c_4) s^6 + b_2c_5s^7 &=
\end{aligned}$$

igualando los coeficientes de s^0 , s^1 , s^2 , s^3 y s^4 se tiene los dos sistemas de ecuaciones (3.13) y (3.14),

$$\left\{ \begin{array}{l} b_0c_0 = a_0 \\ b_0c_1 + b_1c_0 = a_1 \\ b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0 = a_2 \end{array} \right. \quad (3.13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_0c_3 + b_1c_2 + b_2c_1 = 0 \\ b_0c_4 + b_1c_3 + b_2c_2 = 0. \end{array} \right. \quad (3.14)$$

como $b_0 = 1$, al resolver primero el sistema (3.14) se obtienen los valores de b_1 y b_2 . Al sustituir dichos valores en el sistema (3.13) se obtienen los parámetros de a_0 , a_1 , y a_2 .

Para resolver el sistema (3.14) se escribe,

$$\begin{aligned}
b_1c_2 + b_2c_1 &= -c_3 \\
b_1c_3 + b_2c_2 &= -c_4
\end{aligned}$$

usando la regla de Cramer,

$$b_1 = \frac{\begin{vmatrix} -c_3 & c_1 \\ -c_4 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_2 & c_1 \\ c_3 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{-c_2c_3 + c_1c_4}{c_2^2 - c_1c_3} \quad b_2 = \frac{\begin{vmatrix} c_2 & -c_3 \\ c_3 & -c_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_2 & c_1 \\ c_3 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{-c_2c_4 + c_3^2}{c_2^2 - c_1c_3}$$

sustituyendo b_1 y b_2 en el sistema (3.13),

$$\begin{aligned} a_0 &= c_0 \\ a_1 &= c_1 + c_0 \frac{-c_2c_3 + c_1c_4}{c_2^2 - c_1c_3} \\ a_2 &= c_2 + \frac{-c_2c_3 + c_1c_4}{c_2^2 - c_1c_3}c_1 + \frac{-c_2c_4 + c_3^2}{c_2^2 - c_1c_3} \end{aligned}$$

Finalmente se obtiene la función racional que aproxima la serie

$$\begin{aligned} U_i(s) &\approx \frac{a_0 + a_1s + a_2s^2}{b_0 + b_1s + b_2s^2} = \frac{c_0 + \left(c_1 + c_0 \frac{-c_2c_3 + c_1c_4}{c_2^2 - c_1c_3}\right)s + \left(c_2 + \frac{-c_2c_3 + c_1c_4}{c_2^2 - c_1c_3}c_1 + \frac{-c_2c_4 + c_3^2}{c_2^2 - c_1c_3}\right)s^2}{1 + \left(\frac{-c_2c_3 + c_1c_4}{c_2^2 - c_1c_3}\right)s + \left(\frac{-c_2c_4 + c_3^2}{c_2^2 - c_1c_3}\right)s^2} \\ &= \frac{(c_0c_2^2 - c_0c_1c_3) + (c_1c_2^2 - c_3c_1^2 + c_0c_4c_1 - c_0c_3c_2)s + (c_4c_1^2 - 2c_1c_2c_3 + c_2^3 - c_4c_2 + c_3^2)s^2}{(c_2^2 - c_1c_3) + (c_1c_4 - c_2c_3)s + (c_3^2 - c_2c_4)s^2} \end{aligned}$$

Escribiendo los coeficientes de la función en términos de σ ,

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{-c_2c_3 + c_1c_4}{c_2^2 - c_1c_3} = \frac{-(-\sigma^2)(-2\sigma^3) + (-\sigma)(-5\sigma^4)}{(-\sigma^2)^2 - (-\sigma)(-2\sigma^3)} = -3\sigma \\ b_2 &= \frac{-c_2c_4 + c_3^2}{c_2^2 - c_1c_3} = \frac{-(-\sigma^2)(-5\sigma^4) + (-2\sigma^3)^2}{(-\sigma^2)^2 - (-\sigma)(-2\sigma^3)} = \sigma^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0c_0 = 1 \\ a_1 &= b_0c_1 + b_1c_0 = (1)(-\sigma) + (-3\sigma)(1) = -4\sigma \\ a_2 &= b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0 = (1)(-\sigma^2) + (-3\sigma)(-\sigma) + (\sigma^2)(1) = 3\sigma^2 \end{aligned}$$

con los valores de los coeficientes, la función racional queda en la forma (3.15),

$$U_i(s) \approx \frac{1 - 4\sigma s + 3\sigma^2 s^2}{1 - 3\sigma s + \sigma^2 s^2}. \quad (3.15)$$

Para comprobar la validez de lo realizado se supone un sistema HVDC que tiene los parámetros del cuadro 3.1, se calcula el valor de la tensión en el inversor, y se compara con el valor exacto. En la sección 3.4 se valida el método con el sistema de prueba dado en [8], tomando en cuenta el modo de operación del sistema HVDC.

Cuadro 3.1: Parámetros del sistema.

Variable	Valor
R_L	0,1
R_{cr}	0,09549
R_{ci}	0,09549
P_i	0,75
V_r	1,2

Con los parámetros del sistema, del cuadro 3.1, se puede calcular el valor de la transformación $\sigma = P_i R_L / V_r^2 = 5.208\,333\,33 \times 10^{-2}$. Sustituyendo los valores en (3.15) se obtiene,

$$U_i(s) \approx \frac{8.138\,020\,823 \times 10^{-3} s^2 - 0,208\,333\,333\,2s + 1,0}{2.712\,673\,608 \times 10^{-3} s^2 - 0,156\,249\,999\,9s + 1,0}$$

Al evaluar en $s = 1$, se tiene el valor numérico de relación de tensiones,

$$U_i \approx 0,944\,878\,8617.$$

Recordando que $U_i = \frac{V_i}{V_r}$, entonces,

$$V_i = V_r U_i = (1,2) (0,944\,878\,861\,7) = 1,133\,854\,634.$$

Cálculo del valor exacto de V_i

En este caso particular, al ser un modelo HVDC de dos estaciones convertidoras, el valor exacto de V_i se puede obtener al resolver la ecuación (3.5) en forma algebraica, y multiplicar por V_r .

Para determinar el valor exacto se parte de la ecuación 3.5

$$U_i = 1 - \sigma U_i^{-1}$$

ahora se multiplica ambos lados por U_i ,

$$U_i^2 = U_i - \sigma.$$

Al reescribir se obtiene:

$$U_i^2 - U_i + \sigma = 0.$$

La última ecuación es cuadrática, cuyo resultado es:

$$U_i = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4\sigma}.$$

El valor exacto de U_i , se obtiene al sustituir el valor $\sigma = P_i R_L / V_r^2 = 5.208\,333\,33 \times 10^{-2}$,

$$\begin{aligned} U_{i,exacto} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4\sigma} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4(5.208\,333\,33 \times 10^{-2})} \\ &= 0,944\,878\,260\,5 \\ V_{i,exacto} &= (U_{i,exacto})(V_r) \\ &= (0,944\,878\,260\,5)(1,2) \\ &= 1.133\,853\,912\,6. \end{aligned}$$

De esta forma, el valor $V_{i,exacto}$, se usa para obtener los porcentajes de error, del cuadro 3.2.

Comparación con el valor exacto

El cuadro 3.2, muestra los resultados de la aproximación de Padé. Estos cálculos se realizaron programando en Matlab, una subrutina que determina los coeficientes de la serie de potencias y la función racional, y cuyos detalles se encuentran en el anexo A.2.

Cuadro 3.2: Aproximaciones de Padé para V_i .

Orden	V_i	Error %
[1, 1]	1,1340659341	$1,9 \times 10^{-2}$
[2, 2]	1,133854634	$6,4 \times 10^{-5}$
[3, 3]	1,1338539151	$2,2 \times 10^{-7}$
[4, 4]	1,1338539126	$7,4 \times 10^{-10}$
[5, 5]	1,1338539126	$2,5 \times 10^{-12}$

A partir del cuadro 3.2, la primera columna corresponde al orden de la aproximación de Padé, la segunda, a los valores de V_i obtenidos con la aproximación y la tercera columna al porcentaje de error con respecto al valor exacto de V_i .

De esta forma, el ciclo *for* de Matlab para el cálculo de los coeficientes de la serie de potencias se muestra a continuación.

```
for j = 2:2*N+2
    if 2*N+2<j
        c(j) = c;
        W(j) = W;
    else
        c(j) = -o*W(j-1);           % Coef de serie U(s)
        W(j) = -W*transp(flip(c(2:j))); % Coef de serie W(s)
    end
end
end
```

La aproximación de Padé en Matlab, se realizó por medio del código siguiente.

```
% Calculo de los coeficientes del denominador
for i = 1:N
    for k=1:N
        A(i,k) = c(N+k-i+1);
        cL(k) = flip((c(N+k+1)));
        F = flip(A);
        ct = transpose(cL);
    end
end

% Calculo de los coeficientes del numerador
B = transpose(CoefDen);
C = [c(1:N+1)];
a = conv(C,B);
CoefNum = [a(1:N+1)];
```

El código completo se muestra en el anexo A.2.

Cálculo de las variables a_i , ϕ_i y Q_{di}

El cálculo de las otras variables, se realiza dependiendo de las variables especificadas de acuerdo a los modos de operación. Por ejemplo, si el modo de operación especifica a γ , se puede obtener la razón de transformación a_i . Esto se logra a partir de las ecuaciones (3.16) y (3.17).

$$V_i = V_{di} \cos \gamma - R_{ci} I_d. \quad (3.16)$$

$$V_{di} = \frac{3\sqrt{2}}{\pi} a_i v_{aci}. \quad (3.17)$$

Sustituyendo (3.17) en (3.16), se tiene:

$$V_i = \frac{3\sqrt{2}}{\pi} a_i v_{aci} \cos \gamma - R_{ci} I_d,$$

Al despejar a_i , se obtiene:

$$a_i = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \frac{V_i + R_{ci} I_d}{v_{aci} \cos \gamma} \quad (3.18)$$

La corriente I_d se obtiene por la relación (3.2), que se transcribe en la ecuación (3.19),

$$I_d = \frac{V_r - V_i}{R_L}. \quad (3.19)$$

Al obtener a_i , el valor de V_{di} queda determinado por (3.17) y así se puede obtener ϕ_i , por la relación (3.20), y la potencia reactiva, se determina con (3.21).

$$\phi_i = \cos^{-1} \frac{V_i}{V_{di}}. \quad (3.20)$$

$$Q_{di} = P_{di} \tan \phi_i. \quad (3.21)$$

Cálculo de las variables a_r , ϕ_r y Q_{dr}

En el caso de las variables del rectificador, si se especifica el ángulo α , el procedimiento es análogo. Se puede determinar las variables intercambiando i por r en las ecuaciones (3.16), (3.17), (3.18), (3.20) y (3.21).

El valor de V_r se determina por

$$V_r = V_{dr} \cos \alpha - R_{cr} I_d \quad (3.22)$$

donde V_{dr} se obtiene de (3.17) cambiando el índice i por r ,

$$V_{dr} = \frac{3\sqrt{2}}{\pi} a_r v_{acr}. \quad (3.23)$$

La relación de transformación se obtiene con

$$a_r = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \frac{V_r + R_{cr} I_d}{v_{acr} \cos \alpha}. \quad (3.24)$$

El ángulo del factor de potencia ϕ_r y la potencia reactiva Q_{dr} se determinan por

$$\phi_r = \cos^{-1} \frac{V_r}{V_{dr}}. \quad (3.25)$$

$$Q_{dr} = P_{dr} \tan \phi_r. \quad (3.26)$$

3.3 Cálculo de la tensión en el rectificador

En la sección 3.2, se determinó el procedimiento para encontrar la tensión del inversor, cuando se especifican la corriente I_d y la tensión V_r del rectificador. Sin embargo, lo común es que sea la tensión del inversor la que se especifica, por lo que, la tensión del rectificador es la que se debe determinar. En esta sección se demuestra que el método de Inclusión Holomórfca, también permite determinar la tensión del rectificador, en los casos que se requiera.

Para determinar la tensión V_r se parte nuevamente de la relación (3.2) para la corriente,

$$\begin{aligned}
I_d &= \frac{V_r - V_i}{R_L}. \\
I_d &= -\frac{V_i - V_r}{R_L} \\
\frac{P_r}{V_r} &= -\frac{V_i - V_r}{R_L}.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Multiplicando por $\frac{R_L}{V_r}$ se obtiene,

$$\frac{P_r R_L}{V_r^2} = -\frac{V_i}{V_r} + 1.$$

Reescribiendo se obtiene la ecuación (3.28),

$$\frac{-P_r R_L}{V_i^2} \frac{V_i^2}{V_r^2} = \frac{V_i}{V_r} - 1. \tag{3.28}$$

Usamos las transformaciones (3.29), en (3.28) y se reescribe para obtener la ecuación (3.30),

$$U_r = \frac{V_r}{V_i} \quad \sigma = -\frac{P_r R_L}{V_i^2} \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned}
\sigma (U_r^{-1})^2 &= U_r^{-1} - 1 \\
\sigma U_r^{-2} &= U_r^{-1} - 1 \\
1 &= U_r^{-1} - \sigma U_r^{-2} \\
U_r &= 1 - \sigma U_r^{-1}
\end{aligned} \tag{3.30}$$

La ecuación (3.30) tiene la misma forma que la obtenida para U_i , (ecuación 3.5). Esto quiere decir que, las ecuaciones para obtener los coeficientes de la serie $U_r(s)$, son las mismas que para el caso de $U_i(s)$, y la función racional tiene la misma forma, bajo las transformaciones 3.29, así, para determinar el valor U_r , solo se debe cambiar el i por r en la ecuación (3.15) y evaluar $s = 1$, de donde el valor numérico de V_r se obtiene al multiplicar U_r por V_i .

Según lo anterior, la función racional para U_r es,

$$U_r(s) \approx \frac{1 - 4\sigma s + 3\sigma^2 s^2}{1 - 3\sigma s + \sigma^2 s^2}. \quad (3.31)$$

El hecho de que se puede determinar tanto V_i como V_r , se debe a linealidad de $I = f(V)$ y la forma en que se ha escogido las transformaciones U_i y U_r . En estas relaciones, el denominador es un valor constante y el numerador es la variable.

En el caso de la transformación $\sigma = -\frac{PR_L}{V_i^2}$, si en lugar de la potencia, se especifica la corriente, esta sigue siendo válida, si se escribe como:

$$\sigma = -\frac{P_r R_L}{V_i^2} = -\frac{(P_i + R_L I_d) R_L}{V_i^2} = -\frac{P_i R_L}{V_i^2} - \frac{R_L^2 I_d}{V_i^2}.$$

Al sustituir $\frac{P_i}{V_i} = I_d$ se tiene:

$$\sigma = -\frac{R_L}{V_i} I_d - \frac{R_L^2 I_d}{V_i^2}. \quad (3.32)$$

Si el modo de operación del sistema especifica a I_d y V_i , (o γ y a_i), es posible determinar V_r , a partir de las ecuaciones (3.31) y (3.32).

3.4 Validación del método propuesto con el sistema de prueba

En la figura 3.3, se muestra el sistema de prueba usado para validar el método de Inclusión Holomórfica, en el cálculo de flujo de potencia en sistemas HVDC. Los parámetros del sistema, se muestran en el cuadro 3.3.

Cuadro 3.3: Parámetros del sistema de prueba, [8].

$a_r = a_i = 0,9$
$R_L = 0,05$
$X_{cr} = X_{ci} = 0,1$

El sistema de prueba consta de cuatro barras y dos estaciones convertidoras. El modo de operación especifica a las variables γ , I_d , a_i y a_r . Como los objetivos de este

trabajo están centrados en la parte de corriente continua de los sistemas HVDC, las tensiones en las barras de las estaciones convertidoras no se calculan, esto quiere decir, que se usan los valores como se dan en [8].

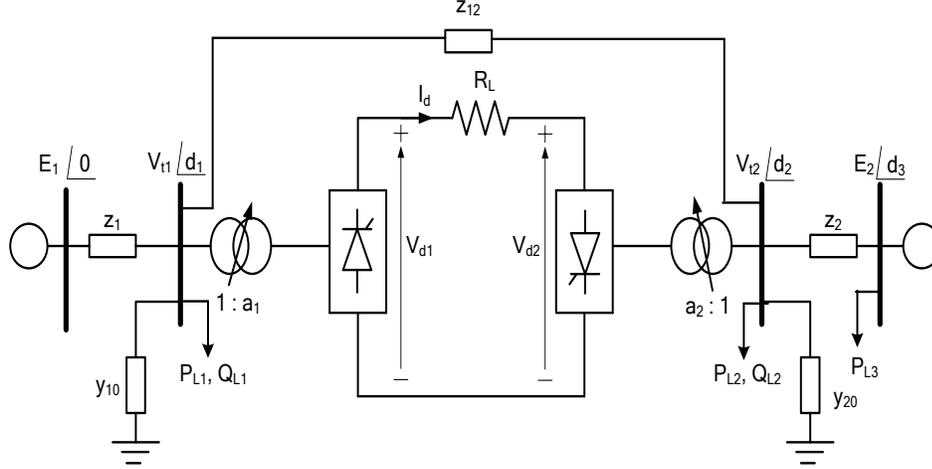


Figura 3.3: Esquema del sistema de prueba. Tomado de [8].

Como el modo de operación del sistema de la figura 3.3, incluye las variables especificadas $I_d = 1,0$, $\gamma = 18^\circ$, $a_r = a_i = 0,9$ [8], primero se realiza el cálculo de V_i , por medio de la ecuación (3.16),

$$\begin{aligned} V_i &= \frac{3\sqrt{2}}{\pi} a_i v_{aci} \cos \gamma - R_{ci} I_d \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{\pi} (0,9) (0,992) \cos (18^\circ) - \left(\frac{3 \times 0,1}{\pi} \right) (1) \\ &= 1.0511993097. \end{aligned}$$

Ahora se puede determinar el valor de la transformación σ , con la ecuación (3.32).

$$\begin{aligned} \sigma &= -\frac{R_L}{V_i} I_d - \frac{R_L^2 I_d}{V_i^2} \\ &= -\frac{0,05}{1.0511993097} (1) - \frac{(0,05)^2 (1)}{(1.0511993097)^2} \\ &= -4.9827121724 \times 10^{-2}. \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de σ en (3.31), la función $U_r(s)$ queda en la forma (3.33),

$$U_r(s) \approx \frac{1 + 0,199\,308\,486\,90s + 7.448\,226\,177\,9 \times 10^{-3}s^2}{1 + 0,149\,481\,365\,17s + 2.482\,742\,059\,3 \times 10^{-3}s^2}. \quad (3.33)$$

Al evaluar (3.33) en $s = 1$,

$$U_r \approx 1,0475645079.$$

El valor de V_r es,

$$V_r = U_r V_i = 1,0475645079 \times 1,0511993097 = 1,1011990876.$$

El valor exacto de V_r , se determinó como en la sección 3.2, para compararlo con el obtenido mediante el método de Inclusión Holomórfica. El cuadro 3.4, se muestra el valor de V_r obtenido con varios órdenes de la aproximación de Padé, así como, el porcentaje de error respectivo, al valor exacto.

$$U_{r,exacto} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4(-4,9827121724 \times 10^{-2})} = 1,0475647192$$

$$V_{r,exacto} = U_{r,exacto} V_i = 1.047\,564\,719\,2 \times 1,0511993097 = 1.101\,199\,309\,7$$

Cuadro 3.4: Aproximaciones de Padé.

Orden	V_r	Error %
[1, 1]	1,1010915585	$9,8 \times 10^{-3}$
[2, 2]	1,1011990875	$2,0 \times 10^{-5}$
[3, 3]	1,1011993092	$4,2 \times 10^{-8}$
[4, 4]	1,1011993097	$8,6 \times 10^{-11}$
[5, 5]	1,1011993097	$2,0 \times 10^{-13}$

Ahora con el valor de V_r , se pueden determinar las demás variables

$$\begin{aligned}
 V_r &= \frac{3\sqrt{2}}{\pi} a_r v_{acr} \cos \alpha - R_{cr} I_d \Rightarrow \\
 \alpha &= \cos^{-1} \left(\frac{\pi V_r + \pi R_{cr} I_d}{3\sqrt{2} a_r v_{acr}} \right) \\
 &= \frac{180}{\pi} \arccos \left(\frac{\pi (1.1011990876) + 3 (0,1) (1)}{3\sqrt{2} (0,9) (0,9936)} \right) \\
 &= 7.7237295454^\circ \\
 V_{dr} &= \frac{3\sqrt{2}}{\pi} a_r v_{acr} = \frac{3\sqrt{2}}{\pi} (0,9) (0,9936) \\
 &= 1.2076482938 \\
 \phi_r &= \frac{180}{\pi} \cos^{-1} \left(\frac{V_r}{V_{dr}} \right) \\
 &= \frac{180}{\pi} \cos^{-1} \left(\frac{1.1011990876}{1,2076482938} \right) \\
 &= 24.237150251^\circ
 \end{aligned}$$

$$P_r = V_r I_d = 1.1011990876$$

$$Q_r = V_r I_d \cos \phi_r = 1.0041329390$$

$$V_{di} = \frac{3\sqrt{2}}{\pi} a_i v_{aci} = \frac{3\sqrt{2}}{\pi} (0,9) (0,992) = 1,2057036106$$

$$\begin{aligned}
 \phi_i &= \frac{180}{\pi} \cos^{-1} \left(\frac{V_i}{V_{di}} \right) \\
 &= \frac{180}{\pi} \cos^{-1} \left(\frac{1,0511993097}{1,2057036106} \right) \\
 &= 29,325019669^\circ
 \end{aligned}$$

$$P_i = V_i I_d = 1,0511993097$$

$$Q_i = V_i I_d \tan \phi_i = 0,59050927841$$

De esta forma en el cuadro 3.5, se muestra el resumen de los resultados, y en el cuadro 3.6, se muestra los resultados de [8].

Cuadro 3.5: Resultados del flujo de potencia con el método de Inclusión Holomórfica

Rectificador		Inversor	
V_r	1,1011990876	V_i	1,051 199 3097
α	7,7237295454°	γ	18°
a_r	0,9	a_i	0,9
ϕ_r	24,237 150 251°	ϕ_i	29,325019669°
I_d	1,0	I_d	1,0
P_r	1,1011990876	P_i	1,0511993097
Q_r	1,0041329390	Q_i	0,59050927841

Cuadro 3.6: Resultados del flujo de potencia dados en [8]. Modo de operación (I_d, γ, a_r, a_i)

Rectificador		Inversor	
V_r	1,101	V_i	1,0517
α	7,7°	γ	18°
a_r	0,9	a_i	0,9
ϕ_r	23,582°	ϕ_i	28,808°
I_d	1,0	I_d	1,0

3.5 Compración con otros métodos

Con el fin de comparar el método de Inclusión Holomórfica, con otros métodos de solución de flujo de potencia, en esta sección calcula la tensión V_r , del sistema de prueba [8], usado en la sección 3.4, con los métodos iterativos de Newton-Raphson y de Gauss-Seidel.

Los cuadros 3.7 y 3.8 muestran los resultados obtenidos. En ambos cuadros, en la primera columna se tiene el número de iteración, en la segunda, el valor de V_r , y en la tercera, el error obtenido en cada iteración. Los cálculos se hicieron programando en Matlab subrutinas que determinan iterativamente, el valor de V_r , estas se muestran en los anexos A.3 y A.4.

La exactitud especificada fue de seis decimales para ambos métodos. Con el método de Newton-Raphson, se alcanza la convergencia en la cuarta iteración, mientras que en el caso del método de Gauss-Seidel, se requieren seis iteraciones.

El valor obtenido coincide con el valor exacto de V_r , determinado en la sección 3.4 y con el obtenido mediante el método de Inclusión Holomórfica.

El valor de V_r determinado con los métodos iterativos de esta sección, se alcanza con el método de Inclusión Holomórfica, sin necesidad de usar órdenes altos de aproximación de Padé, como se puede observar en el cuadro 3.4.

Para alcanzar seis decimales con el método de Inclusión Holomórfica, solo es necesario usar hasta segundo orden de aproximación de la Padé, esto presenta un ahorro en el tiempo de procesamiento.

Cuadro 3.7: Calculo de V_r mediante el método de Newton-Raphson, con $V_{r0} = 1,0$.

Iteración	V_r	Error iterativo absoluto
1	1,111993	$1,11 \times 10^{-1}$
2	1,101298	$1,07 \times 10^{-2}$
3	1,101199	$9,90 \times 10^{-5}$
4	1,101199	0

Cuadro 3.8: Calculo de V_r mediante el método de Gauss-Seidel, con $V_{r0} = 1,0$.

Iteración	V_r	Error iterativo absoluto
1	1,106259	$1,07 \times 10^{-1}$
2	1,100970	$5,28 \times 10^{-3}$
3	1,101209	$2,39 \times 10^{-4}$
4	1,101198	$1,10 \times 10^{-5}$
5	1,101199	$1,00 \times 10^{-6}$
6	1,101199	0

Los cuadros 3.9 y 3.10, presentan los resultados al tomar un valor inicial de $V_{r0} = 1,2$. Se puede notar que el número de iteraciones es el mismo que al tomar el valor inicial $V_{r0} = 1,0$, en el caso del método de Newton-Raphson (cuadro 3.7); sin embargo, el error es menor.

Para el caso del método de Gauss-Seidel, el número de iteraciones cambia, se requiere una iteración más con respecto al método de Newton-Raphson, (cuadro 3.8).

En ambos casos, y para ambos métodos, se demuestra que según se elija el valor inicial, la exactitud varía.

Cuadro 3.9: Calculo de V_r mediante el método de Newton-Raphson, con $V_{r0} = 1,2$.

Iteración	V_r	Error iterativo absoluto
1	1,108436	$9,15 \times 10^{-2}$
2	1,101244	$7,19 \times 10^{-3}$
3	1,101199	$4,40 \times 10^{-5}$
4	1,101199	0

Cuadro 3.10: Calculo de V_r mediante el método de Gauss-Seidel, con $V_{r0} = 1,2$.

Iteración	V_r	Error iterativo absoluto
1	1,097082	$1,03 \times 10^{-1}$
2	1,101386	$4,30 \times 10^{-3}$
3	1,101190	$1,96 \times 10^{-4}$
4	1,101199	$8,00 \times 10^{-6}$
5	1,101199	0

En las figuras 3.4 y 3.5, se visualizan las variaciones explicadas en los párrafos anteriores. En estas se muestra el error absoluto y el número de iteraciones requeridas al variar el valor inicial. Cada gráfica corresponde al error, variando el valor inicial desde 1.0 p.u. a 1.2 p.u., en pasos de 0.01 p.u., donde se consideran seis decimales exactos. Así mismo, se puede notar como hay variaciones en el error obtenido.

La variación en el error, indica que se requiere un mayor número de iteraciones, dependiendo del valor inicial escogido. Esto representa una mayor capacidad de procesamiento, y a su vez, una de las desventajas de los métodos iterativos. Por el contrario, al usar el método de Inclusión Holomórfica, donde el valor inicial no tiene influencia en el error, ya que, el valor inicial es el correspondiente al valor c_0 de la serie de potencias, el cual se calcula directamente y no es necesario suponer, como se muestra en la figura 3.6. La gráfica de la figura 3.6 se ha construido siguiendo el diagrama de flujo de la figura 3.1. Usando el código en Matlab del anexo A.2 se especificaron seis decimales en la solución, según el paso 8 del diagrama de flujo. El programa calcula la aproximación de Padé de orden uno y verifica la tolerancia. Al no cumplirse la tolerancia, se calcula la aproximación de Padé de orden dos, y de esta forma, se alcanza los seis decimales especificados, dando por finalizado el programa, y mostrando el resultado y la gráfica (figura 3.6).

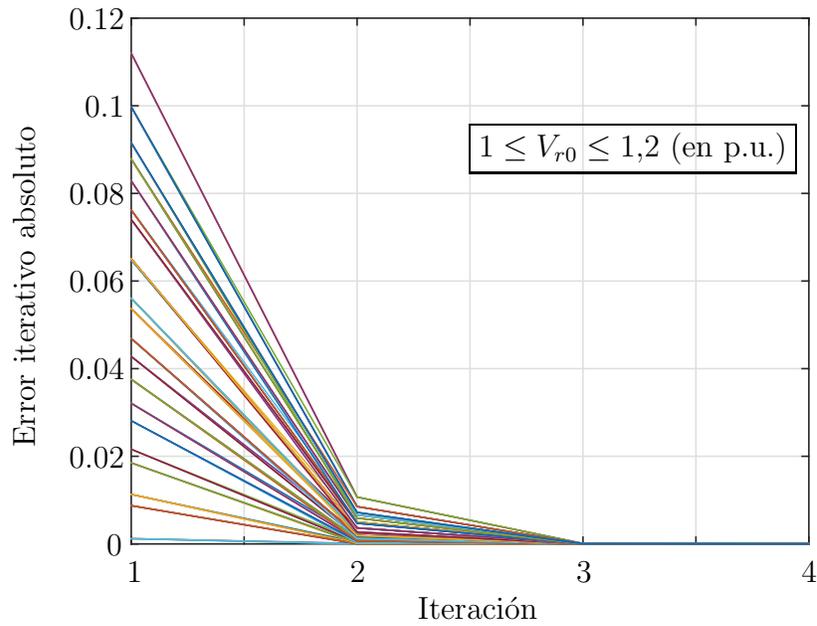


Figura 3.4: Error absoluto de V_r al usar el método de Newton-Raphson.

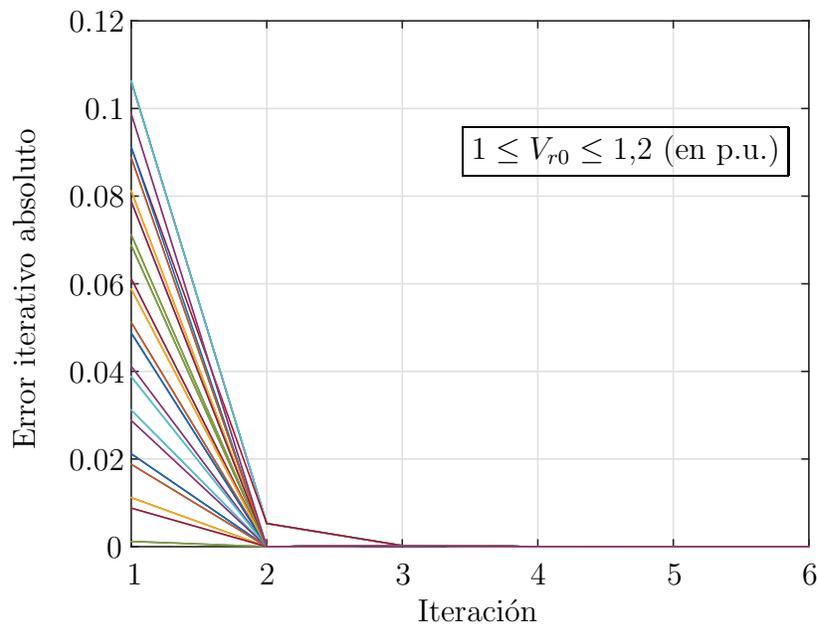


Figura 3.5: Error absoluto de V_r al usar el método de Gauss-Seidel.

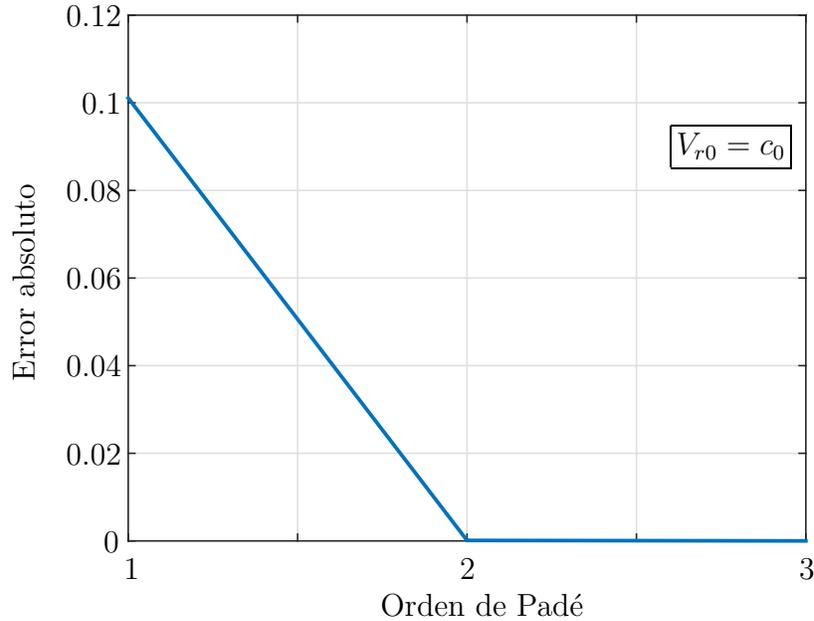


Figura 3.6: Cálculo de V_r con el método de Inclusión Holomórfica.

En la figura 3.7 se muestran las gráficas del cálculo de V_r con los métodos usados, así como el valor exacto obtenido en la sección 3.4. De dicha figura, se nota como el Método de Inclusión Holomórfica presenta un mejor resultado, desde el primer cálculo realizado, correspondiente a la aproximación de Padé orden uno, mientras que en la primera iteración en los métodos de Newton-Raphson y Gauss-Seidel, el valor obtenido es diferente del valor exacto.

En la segunda iteración, las gráficas de los métodos de Newton-Raphson y de Gauss-Seidel, aún no alcanzan el valor exacto, mientras que la gráfica del Método de Inclusión Holomórfica, ya indica el valor exacto.

En el cuadro 3.11 se muestran los tiempos de ejecución de los programas implementados en Matlab, para los métodos usados en el cálculo de la tensión. El método de Inclusión Holomórfica requiere menor tiempo que los métodos de Newton-Raphson y de Gauss-Seidel.

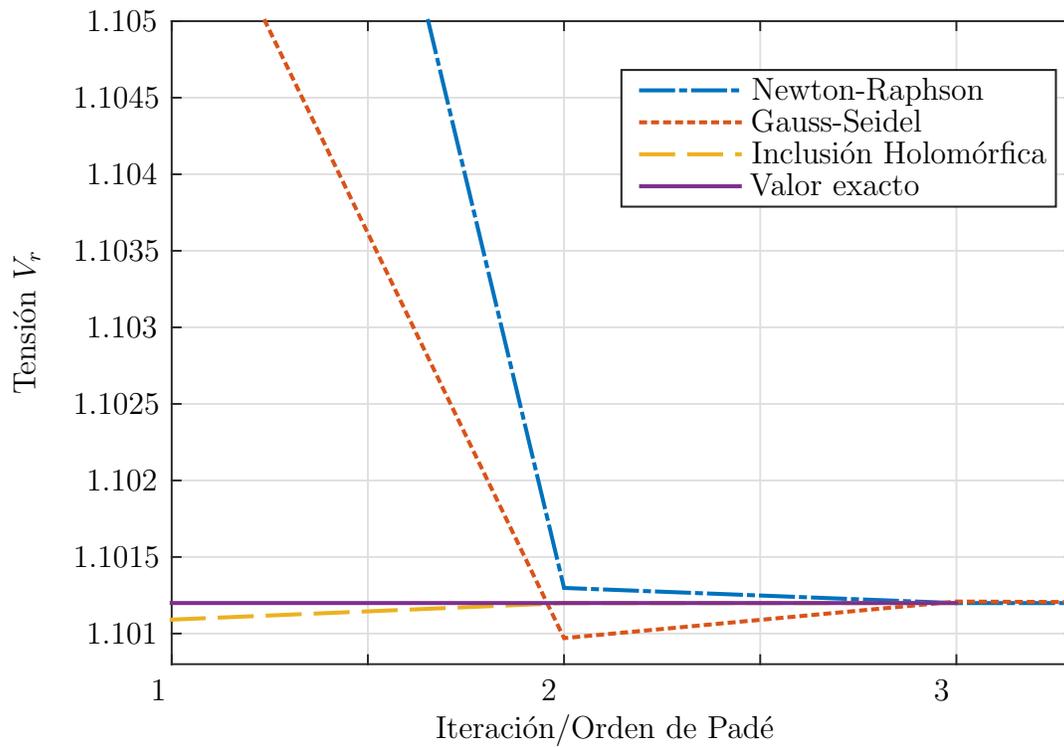


Figura 3.7: Comparación de los métodos usados con el valor exacto.

Método	GS	NR	HELM
Tiempo/s	1.00	0.53	0.33

Cuadro 3.11: Tiempos de ejecución de los programas en Matlab.

4 Conclusiones y recomendaciones

Conclusiones

El método de Inclusión Holomófica permite determinar las tensiones en CC, de las estaciones convertidoras de forma analítica. El procedimiento de solución, aunque es más laborioso, al determinar las ecuaciones necesarias para el cálculo de los coeficientes de la serie de potencias y para la aproximación de Padé, requiere menos cálculos, al comprobar la tolerancia especificada, con respecto a los métodos iterativos de Newton-Raphson y de Gauss-Seidel. Esto se debe a que, los coeficientes de la serie se calculan en forma recursiva, por lo que no es necesario repetir todo el cálculo para obtener uno o más términos en la serie.

Otra ventaja del método de Inclusión Holomófica es que no hay dependencia del valor inicial (figura 3.6), como en el caso de los métodos iterativos (figuras 3.4 y 3.5).

Los errores en la solución son bajos, en comparación con el valor exacto determinado en la secciones 3.2 y 3.4, para las tensiones V_i y V_r , respectivamente.

Se puede resolver el flujo de potencia con el método de Inclusión Holomófica, aún si en lugar de la potencia en las estaciones convertidoras, se especifica la corriente, como se demostró en la secciones 3.3 y 3.4.

Lo anterior quiere decir que, se puede tomar en cuenta los diferentes modos de operación del sistema de HVDC para resolver el flujo de potencia con el método de Inclusión Holomófica, partiendo de las transformaciones (3.32) y (3.29).

Recomendaciones

El cálculo de la tensión en CC, se puede agilizar si se inicia calculando un orden mayor a uno en la aproximación de Padé. Esto es útil, en el caso de tener sistemas con múltiples

estaciones convertidoras donde se podrían requerir una mayor cantidad de cálculos, al requerir un orden más alto, en la aproximación de Padé.

También es importante tomar en cuenta, los modos de operación del sistema HVDC, para identificar las variables especificadas y las variables que se deben calcular. En el caso de que se especifique la corriente, en lugar de la potencia del convertidor, la transformación sigma usada, deber ser la (3.32) y no la (3.29). Además puede ser necesarios cálculos preliminares, para determinar V_r o V_i , si no se dan explícitamente, antes de iniciar el cálculo de la tensión requerida con el método de Inclusión Holomófica. Para esto, se deben usar las ecuaciones del capítulo 2 y las secciones 3.2 y 3.3.

Trabajos futuros

El método de Inclusión Holomófica puede extenderse a:

- El análisis de flujo de potencia en redes más complejas, como sistemas HVDC con múltiples estaciones convertidoras.
- El análisis de flujo de potencia en sistemas que son débilmente condicionados, donde la solución en los métodos numéricos no converja.
- Estabilidad de tensión, para calcular los puntos sobre las curva PV, incluyendo los puntos de inestabilidad, que no son posibles de calcular por métodos numéricos.

Bibliografía

- [1] Mander DK, Saini SK. Load Flow Analysis: A Review. *International Journal of Advanced Research in Electrical, Electronics and Instrumentation Engineering*. 2016 March;5(3):1254–1260.
- [2] Afolabi O, Ali W, Cofie P, Fuller J, Obiomon P, Kolawole E. Analysis of the Load Flow Problem in Power System Planning Studies. *Energy and Power Engineering*. 2015 Sept;7(10):509–523.
- [3] Mehta D, Molzahn D, Turitsyn K. Recent Advances in Computational Methods for the Power Flow Equations. *American Control Conference*. 2016 July;p. 1753–1765.
- [4] Trias A. The Holomorphic Embedding Load Flow Method. *IEEE Power Energy Soc General Meet*. 2012 July;p. 1–8.
- [5] Trias A, Marín JL. The Holomorphic Embedding Loadflow Method for DC Power Systems and Nonlinear DC Circuits. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*. 2016 Feb;63(2):322–333.
- [6] Damián A. Estudio de flujos de carga en sistemas eléctricos de potencia con enlaces HVDC [Tesis]. Instituto Politécnico Nacional. México D.F.; 2015.
- [7] Sabir M, Belkhiat S, Saadate S, Flieller D. A new approach for load flow analysis of integrated AC–DC power systems using sequential modified Gauss–Seidel methods. *European Transactions on Electrical Power*. 2012 May;p. 421–432.
- [8] Taha I, Ghoneim S, G Ashmawy M. Hybrid AC-DC System Power Flow Calculations Based on Modified Newton-Raphson Method. 2017 August;16:156–162.

- [9] Trias A, inventor; System and Method for Monitoring and Managing Electrical Power Transmission and Distribution Networks. United States patent US 7,979,239 B2; 2009 Apr 14.
- [10] Trias A, inventor; System and Method for Monitoring and Managing Electrical Power Transmission and Distribution Networks. United States patent US 7,979,239 B2; 2011 Jul 12.
- [11] Rao S, Tylavsky D. Nonlinear network reduction for distribution networks using the holomorphic embedding method. In: 2016 North American Power Symposium (NAPS); 2016. p. 1–6.
- [12] Sun L, Ju Y, Yang L, Ge S, Fang Q, Wang J. Holomorphic Embedding Load Flow Modeling of the Three-phase Active Distribution Network. In: 2018 International Conference on Power System Technology (POWERCON); 2018. p. 488–495.
- [13] Subramanian MK, Feng Y, Tylavsky D. PV bus modeling in a holomorphically embedded power-flow formulation. In: 2013 North American Power Symposium (NAPS); 2013. p. 1–6.
- [14] Feng Y, Tylavsky D. A novel method to converge to the unstable equilibrium point for a two-bus system. In: 2013 North American Power Symposium (NAPS); 2013. p. 1–6.
- [15] Subramanian MK. Application of Holomorphic Embedding to the Power-Flow Problem [Master Thesis]. Arizona State University; 2014.
- [16] Trias A. Fundamentals of the Holomorphic Embedding Load-Flow Method. CoRR. 2015;abs/1509.02421. Available from: <http://arxiv.org/abs/1509.02421>.
- [17] Baghsorkhi SS, Suetin SP. Embedding AC Power Flow with Voltage Control in the Complex Plane : The Case of Analytic Continuation via Padé Approximants. CoRR. 2015;abs/1504.03249. Available from: <http://arxiv.org/abs/1504.03249>.

- [18] Wallace I, Roberts D, Grothey A, McKinnon K. Alternative PV Bus Modelling with the Holomorphic Embedding Load Flow Method. ArXiv; 2016.
- [19] Zhu Y, Tylavsky D. Bivariate holomorphic embedding applied to the power flow problem. In: 2016 North American Power Symposium (NAPS); 2016. p. 1–6.
- [20] Shukla A, Keshewani S, Singh S. Efficient holomorphic based approach for unit commitment problem. In: 2016 National Power Systems Conference (NPSC); 2016. p. 1–6.
- [21] Sauter PS, Braun CA, Kluwe M, Hohmann S. Comparison of the Holomorphic Embedding Load Flow Method with Established Power Flow Algorithms and a New Hybrid Approach. In: 2017 Ninth Annual IEEE Green Technologies Conference (GreenTech); 2017. p. 203–210.
- [22] Santos AC, Freitas FD, Fernandes LFJ. Holomorphic embedding approach as an alternative method for solving the power flow problem. In: 2017 Workshop on Communication Networks and Power Systems (WCNPS); 2017. p. 1–4.
- [23] Chiang H, Wang T, Sheng H. A Novel Fast and Flexible Holomorphic Embedding Power Flow Method. IEEE Transactions on Power Systems. 2018 May;33(3):2551–2562.
- [24] Rao SD, Li S, Tylavsky D, Shi D. The Holomorphic Embedding Applied to a Newton Raphson Power Flow Formulation. In: 2018 North American Power Symposium (NAPS); 2018. p. 1–6.
- [25] Xu X, Liu C, Sun K. A Holomorphic Embedding Method to Solve Unstable Equilibrium Points of Power Systems. In: 2018 IEEE Conference on Decision and Control (CDC); 2018. p. 1580–1585.
- [26] Singh P, Tiwari R. STATCOM Model Using Holomorphic Embedding. IEEE Access. 2019;7:33075–33086.

- [27] Rao BV, Kupzog F, Kozek M. Three-Phase Unbalanced Optimal Power Flow Using Holomorphic Embedding Load Flow Method. *Sustainability*. 2019;11(6). Available from: <https://www.mdpi.com/2071-1050/11/6/1774>.
- [28] Wu D, Wang B. Holomorphic Embedding Based Continuation Method for Identifying Multiple Power Flow Solutions. *IEEE Access*. 2019 July;7:86843–86853.
- [29] Yao R, Liu Y, Sun K, Qiu F, Wang J. Efficient and Robust Dynamic Simulation of Power Systems with Holomorphic Embedding. *IEEE Transactions on Power Systems*. 2019;p. 1–1.
- [30] Liu C, Bak CL, Zhu Y, Sun K. Analytical Solutions for Power Flow Equations Based on the Multivariate Quotient-Difference Method. In: 2019 IEEE Milan PowerTech; 2019. p. 1–6.
- [31] Liu C, Wang B, Xu X, Sun K, Shi D, Bak CL. A Multi-Dimensional Holomorphic Embedding Method to Solve AC Power Flows. *IEEE Access*. 2017 Nov;5:25270–25285.
- [32] Liu C, Wang B, Xu X, Sun K, Bak CL. Approximate Analytical Solutions of Power Flow Equations Based on Multi-Dimensional Holomorphic Embedding Method. *CoRR*. 2017;abs/1706.06622. Available from: <http://arxiv.org/abs/1706.06622>.
- [33] Liu C, Qin N, Sun K, Bak CL. Remote Voltage Control Using the Holomorphic Embedding Load Flow Method. *IEEE Transactions on Smart Grid*. 2019;p. 1–1.
- [34] Rao S, Feng Y, Tylavsky DJ, Subramanian MK. The Holomorphic Embedding Method Applied to the Power-Flow Problem. *IEEE Transactions on Power Systems*. 2016;31(5):3816–3828.
- [35] Okba M, Saiect M, Mostafa M, Abdel-Moneim T. High voltage direct current transmission - A review, part I. In: 2012 IEEE Energytech; 2012. p. 1–7.

- [36] Barnes M, Van Hertem D, Teeuwsen S, Callavik M. HVDC Systems in Smart Grids. *Proceedings of the IEEE*. 2017 Nov;105(11):2082–2098.
- [37] Peake O. The History of High Voltage Direct Current Transmission. In: *Australasian Engineering Heritage Conference*. vol. 3; 2009. p. 1–8.
- [38] Okba M, Saiect M, Mostafa M, Abdel-Moneim T. High voltage direct current transmission - A Review, Part II - Converter technologies. In: *2012 IEEE Energytech*; 2012. p. 1–7.
- [39] Sood VK. 27 - HVDC Transmission. In: Muhammad R, editor. *Power Electronics Handbook*. 4th ed. Butterworth-Heinemann; 2018. p. 847 – 884. Available from: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780128114070000301>.
- [40] Monterrubio M. Transporte de energía eléctrica en corriente continua. Enlaces HVDC-VSC [Proyecto de Fin de Carrera]. Universidad de Valladolid. España; 2013.
- [41] Gao S, Zhu H, Zhang B, Song G. Modeling and simulation analysis of Hybrid Bipolar HVDC system based on LCC-HVDC and VSC-HVDC. In: *2018 IEEE 3rd Advanced Information Technology, Electronic and Automation Control Conference (IAEAC)*; 2018. p. 1448–1452.
- [42] Yang B, Chuang L, Zhu L, Guo C, Gu Z, Wang Z. AC/DC Power Flow Algorithm Considering Various Controls Transformation. In: *2018 2nd IEEE Conference on Energy Internet and Energy System Integration (EI2)*; 2018. p. 1–5.
- [43] Kiliç U, Ayan K. Artificial bee colony algorithm based optimal reactive power flow of two-terminal HVDC systems. *TURKISH JOURNAL OF ELECTRICAL ENGINEERING & COMPUTER SCIENCES*. 2016 01;24:1075–1090.
- [44] Weedy B, Cory B, Jenkis N, Ekanayake J, Strbac G. *Electric power systems*. United Kingdom: John Wiley & Sons Ltd; 2012.

- [45] Taha IBM. Universal modeling and mathematical verification of different AC-DC interconnected configurations for power flow calculations. In: 2017 Nineteenth International Middle East Power Systems Conference (MEPCON); 2017. p. 368–376.
- [46] Rojas G. Optimal power flow for hybrid AC/DC systems in Europe [Master Tesis]. Universitat Politècnica de Catalunya. Barcelona; 2018.
- [47] Rehman B, Liu C. AC/DC multi-infeed power flow solution. IET Generation, Transmission Distribution. 2019;13(10):1838–1844.
- [48] DJEHAF M, sid ahmed Z, Youcef Islam DK. AC Versus DC Link Comparison Based on Power Flow Analysis of a Multimachine Power System. Leonardo Electronic Journal of Practices and Technologies. 2014 06;1:49–60.
- [49] Schmidt B. Implementation and Evaluation of the Holomorphic Embedding Load Flow Method [Master Thesis]. Technische Universität München. München; 2015.
- [50] Feng Y. Solving for the Low-Voltage/Large-Angle Power-Flow Solutions by Using the Holomorphic Embedding Method [Dissertation]. Arizona State University; 2015.
- [51] Santos A. Restarted Holomorphic Embedding Load Flow Method [Master Thesis]. Universidade de Brasília. Brasília; 2018.
- [52] Brezinski C, Redivo-Zaglia M. New representations of Padé, Padé-type, and partial Padé approximants. Journal of Computational and Applied Mathematics. 2015;284:69 – 77. OrthoQuad 2014. Available from: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042714003161>.
- [53] Beckermann B, Matos A. Algebraic properties of robust Padé approximants. arXiv e-prints. 2013 Oct;p. arXiv:1310.2438.

- [54] Press W. Numerical recipes: the art of scientific computing. Cambridge, UK New York: Cambridge University Press; 2007.
- [55] Trias A. HELM: The Holomorphic Embedding Load-Flow Method. Foundations and Implementations. Foundations and Trends in Electric Energy Systems. 2018;3(3-4):140–370. Available from: <http://dx.doi.org/10.1561/31000000015>.
- [56] Yao R, Sun K, Qiu F. Vectorized Efficient Computation of Padé Approximation for Semi-Analytical Simulation of Large-Scale Power Systems. IEEE Transactions on Power Systems. 2019 Sep;34(5):3957–3959.

A Anexos

A.1 Cálculo del producto de las series $V(s)$ y $W(s)$

Para obtener $V(s)W(s)$ se escribe

$$V(s) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n s^n = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + c_3 s^3 + \cdots + c_n s^n + \cdots \quad (\text{A.1})$$

$$W(s) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n s^n = w_0 + w_1 s + w_2 s^2 + w_3 s^3 + \cdots + w_n s^n + \cdots \quad (\text{A.2})$$

al realizar los productos se obtiene

$$\begin{aligned} V(s)W(s) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n s^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} w_n s^n \right) \\ &= (c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + c_3 s^3 + \cdots + c_n s^n + \cdots) \\ &\quad \cdot (w_0 + w_1 s + w_2 s^2 + w_3 s^3 + \cdots + w_n s^n + \cdots) \end{aligned}$$

Realizando las multiplicaciones de cada sumando $c_k s^k$, $k = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$ por cada $w_m s^m$, $m = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$ se tiene

$$\begin{aligned} c_0 w_m s^m &= c_0 w_0 + c_0 w_1 s + c_0 w_2 s^2 + c_0 w_3 s^3 + \cdots + c_0 w_n s^n + \cdots \\ c_1 s w_m s^m &= c_1 w_0 s + c_1 w_1 s^2 + c_1 w_2 s^3 + c_1 w_3 s^4 + \cdots + c_1 w_n s^{n+1} + \cdots \\ c_2 s^2 w_m s^m &= c_2 w_0 s^2 + c_2 w_1 s^3 + c_2 w_2 s^4 + c_2 w_3 s^5 + \cdots + c_2 w_n s^{n+2} + \cdots \\ c_3 s^3 w_m s^m &= c_3 w_0 s^3 + c_3 w_1 s^4 + c_3 w_2 s^5 + c_3 w_3 s^6 + \cdots + c_3 w_n s^{n+3} + \cdots \\ &\vdots \\ c_n w_m s^m &= c_n w_0 s^n + c_n w_1 s^{n+1} + c_n w_2 s^{n+2} + c_n w_3 s^{n+3} + \cdots + c_n w_n s^{n+n} + \cdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

agrupando las potencias de s ,

$$\begin{aligned}
 (c_1 w_0 + c_0 w_1) s &= s \sum_{j=0}^1 w_j c_{1-j} \\
 (c_2 w_0 + c_1 w_1 + c_0 w_2) s^2 &= s^2 \sum_{j=0}^2 w_j c_{2-j} \\
 (c_3 w_0 + c_2 w_1 + c_1 w_2 + c_0 w_3) s^3 &= s^3 \sum_{j=0}^3 w_j c_{3-j} \\
 &\vdots \\
 (c_n w_0 + \cdots + c_0 w_n) s^n &= s^n \sum_{j=0}^n w_j c_{n-j} \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

por lo que el producto da como resultado,

$$\begin{aligned}
 V(s) W(s) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n s^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} w_n s^n \right) = c_0 w_0 + s \sum_{j=0}^1 w_j c_{1-j} + s^2 \sum_{j=0}^2 w_j c_{2-j} \\
 &\quad + s^3 \sum_{j=0}^3 w_j c_{3-j} + \cdots + s^n \sum_{j=0}^n w_j c_{n-j} + \cdots \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n w_j c_{n-j} \right) s^n.
 \end{aligned}$$

El resultado anterior es el usado en las secciones 2.3 y 3.2.

A.2 Programa en Matlab para resolver el flujo de potencia en sistemas HVDC

```

clear all; clc;
syms s
Pi = 0.75;
Qi = 0.577983;
vaci = 0.992;
Xcr = 0.1;
Xci = 0.1;
Rcr = 3*Xcr/pi;
Rci = 3*Xci/pi;
RL = 0.1;
Vr = 1.2;

o = (Pi*RL)/(Vr^2); %Transformacion sigma

N = input('Digite el orden de la aproximacion [N/N] ');
NumDec = input('Digite la cantidad de cifras significativas ');

while NumDec<=1
    disp('Digite un valor mayor a 1')
    NumDec = input('Digite la cantidad de cifras significativas ');
end

c = zeros(2*N+2,1);
W = zeros(2*N+1,1);

c = [1];
W = [1];

for j = 2:2*N+2
    if 2*N+2<j
        c(j) = c;
        W(j) = W;
    else
        c(j) = -o*W(j-1);
        W(j) = -W*transp(flip(c(2:j)));
    end
end

% Vector de coeficientes de la serie
c;
disp(['Los coeficientes de la serie de potencias son: /n', num2str(c)])
disp('La serie de potencias U(s) es:')
U(s) = vpa(poly2sym(flip(c),s),NumDec);

```

```

vpa(U(s), NumDec)

% Aproximacion de Pade
% Calculo de los coeficientes del denominador (CoefDen)

for i = 1:N
    for k=1:N
        A(i,k) = c(N+k-i+1);
        cL(k) = flip((c(N+k+1)));
        F = flip(A);
        ct = transpose(cL);
    end
end

CoefDen = flip([-inv(F)*ct; 1]);
PolDen = vpa(poly2sym(flip(CoefDen), s), NumDec);

% Calculo de los coeficientes del numerador
B = transpose(CoefDen);
C = [c(1:N+1)];
a = conv(C,B);
CoefNum = [a(1:N+1)];
PolNum = vpa(poly2sym(flip(CoefNum), s), NumDec);
disp(['La aproximacion de Pad de orden ', num2str(N), ' es:'])
Pade = vpa(PolNum/PolDen, NumDec)

% Valor numerico de la tension
disp('Valor numerico de la tension es:')
U = vpa(subs(Pade, 1), NumDec)
Vi = vpa(Vr*U, NumDec)
Id = (Vr - Vi)/R

Vrect = Vr - Rcr*Id;
Vinv = Vi - Rci*Id;

Uiexacto = 0.5 + 0.5*(sqrt(1-4*o));
Viexacto = Uiexacto*Vr;

Error = vpa(100*abs((Viexacto - Vi))/Viexacto, 2)

%Angulo de factor de potencia
phi = atan(Qi/Pi);
phiGra = (180/pi)*atan(Qi/Pi);

%Relacion de transformacion
ai = (pi/(3*sqrt(2)))*((Vi - Rci*Id)/(vaci*cos(phi)))

%Angulo inversor
gamma = (180/pi)*vpa(acos((pi*Vi)/(3*sqrt(2)*ai*vaci)))

```

A.3 Programa en Matlab para el método de Newton-Raphson

```

clear all; clc;
syms Vr;
RL = 0.05;
Vi = 1.0511993097;
Id = 1;
a = -(RL/Vi)*Id -((RL/Vi)^2)*Id;
Pr = Vi*Id + RL*Id;
f = Vr^2 - Vr*Vi - RL*Pr;
derf = diff(f);

Vrant = input('Digite el valor inicial ');

m = input('Digite la cantidad de decimales ');

Tolerancia = 1/(10^(m+1));
Figure1=figure(1);clf;
set(Figure1,'defaulttextinterpreter','latex');

tic
for k = 1:100
    x(k) = k;
    Vr = vpa(subs(Vrant - f/derf,Vrant))
    Vr = vpa(Vr - rem(Vr,10^-m));
    ErrorVrIterativo = (abs(Vr-Vrant));
    ErrorVrIterativo = vpa(ErrorVrIterativo - rem(ErrorVrIterativo,10^-m));
    Vrant = Vr;
    Vrect(k,1) = Vr;
    Iteracion(k,1) = k;
    Error(k,1) = ErrorVrIterativo;
    y(k) = Error(k,1);

    %ylim([-0.001 .01])
    %xlim([2.5 4])

    %grid on
    %legend(num2str(Vec))
    hold on
    if ErrorVrIterativo < Tolerancia
        break
    end
    Vrant = Vr;
end

```

```
%Muestra el resultado con la cantidad de decimales requeridas
Vr = vpa(Vr - rem(Vr,10^-m));
Resultado = [Iteracion,Vrect,Error]
toc
plot(x,y)
fprintf('El número de iteraciones es: %f \n', k);

xlabel('k','FontSize',12);
ylabel('Error iterativo absoluto','FontSize',12);
text(3.1,.09,'\framebox{$1\leq V_{r0} \leq 1.2$}','FontSize',12);
set(gca,'Units','normalized','FontWeight','normal','FontSize',12)

grid on
```

A.4 Programa en Matlab para el método de Gauss-Seidel

```

clear all; clc;
syms Vr;
RL = 0.05;
Vi = 1.0511993097;
Id = 1;
a = -(RL/Vi)*Id -((RL/Vi)^2)*Id;
GL = 1/RL;
Pr = Vi*Id + RL*Id;

Vrant = input('Digite el valor inicial ');

m = input('Digite la cantidad de decimales ');
Tolerancia = 1/(10^(m+1));
Figure1=figure(1);clf;
set(Figure1,'defaulttextinterpreter','latex');
tic
for k = 1:100
    x(k) = k;

Vr = vpa(subs((1/GL)*(Pr/Vr + GL*Vi),Vrant));
Vr = vpa(Vr - rem(Vr,10^-(m)));
ErrorVrIterativo = (abs(Vr-Vrant));
%Muestra el resultado con la cantidad de decimales requeridas
ErrorVrIterativo = vpa(ErrorVrIterativo - rem(ErrorVrIterativo,10^-(m)));
Vrant = Vr;
Vrect(k,1) = Vr;
Iteracion(k,1) = k;
Error(k,1) = ErrorVrIterativo;
y(k) = Error(k,1);

%legend(num2str(Vec))

if ErrorVrIterativo < Tolerancia
    break
end
Vrant = Vr;
end
Vr = vpa(Vr - rem(Vr,10^-m));

fprintf('El número de iteraciones es: %f \n', k);

%Muestra el resultado con la cantidad de decimales requeridas

```

```
Resultado = [Iteracion,Vrect,Error]
toc
plot(x,y)
xlabel('k','FontSize',12);
ylabel('Error iterativo absoluto','FontSize',12);
text(4.5,.09,'\framebox{$1\leq V_{r0} \leq 1.2$}','FontSize',12);
set(gca,'Units','normalized','FontWeight','normal','FontSize',12)

grid on
```